

## Вариант №1

### Задача №1

Найдем скорость мячика в момент первого удара о землю:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_0^2; \quad v_0 = \sqrt{2gh}$$

Упруго отскочив со скоростью  $v_0$ , мячик будет двигаться по параболе, его координаты будут меняться по законам  
 $x = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2$ ;  $y = v_0 \cos \alpha t - \frac{1}{2}gt^2$ ,  
 а проекции скорости на оси системы координат

$$v_x = v_0 \sin \alpha - gt; \quad v_y = v_0 \cos \alpha - gt$$

В момент второго удара о землю ( $y = 0$ ):

$$0 = v_0 \cos \alpha - gt_{1,2}; \quad t_{1,2} = \frac{v_0 \cos \alpha}{g}$$

$$v_{2x} = v_0 \sin \alpha - gt_{1,2}; \quad v_{2y} = v_0 \cos \alpha - gt_{1,2}$$

Следовательно, время между первым и вторым ударами

$$t_{1,2} = \frac{2v_0 \cos \alpha}{g} = 2\sqrt{\frac{2gh}{g}} \sin \alpha$$

а расстояние между ударами и проекции скорости мячика в момент второго удара

$$S_{1,2} = v_0 \sin \alpha t_{1,2} - \frac{1}{2}gt_{1,2}^2 = 4\left(\frac{2gh}{g}\right) \sin \alpha \cos \alpha = 16 \text{ м};$$

Законы движения мячика после второго удара:

$$x = v_{2x}t - \frac{1}{2}gt^2; \quad y = v_{2y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

где  $v_{2x} = v_0 \sin \alpha - gt_{1,2}$ ;  $v_{2y} = v_0 \cos \alpha - gt_{1,2}$ . В момент третьего удара мячика ( $y = 0$ ):

$$0 = v_{2y}t_{2,3} - \frac{1}{2}gt_{2,3}^2$$

Следовательно, время между вторым и третьим ударами

$$t_{2,3} = \frac{2v_{2y}}{g} = \frac{2(v_0 \cos \alpha - gt_{1,2})}{g}$$

а расстояние между ними

$$S_{2,3} = v_{2x}t_{2,3} - \frac{1}{2}gt_{2,3}^2 = 8\left(\frac{2gh}{g}\right) \sin \alpha \cos \alpha = 32 \text{ м}.$$

Поскольку  $l = S_{1,2} + S_{2,3}$ , то третий раз мячик о берег не ударится.

После второго удара скорость мячика будет направлена под углом  $\alpha$  к поверхности берега:

$$\tan \alpha = \frac{|v_{2y}|}{v_{2x}} = \frac{\sqrt{\frac{2gh}{g}} \cos \alpha}{3\sqrt{\frac{2gh}{g}} \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{3 \sin \alpha}; \quad \arctg \frac{1}{3} = 30^\circ$$

т.е. скорость мячика  $v_{2y}$  будет направлена горизонтально (параллельно поверхности воды).

Отскочив на расстоянии  $l' = l - S_{1,2}$  от реки, мячик за время

$$t = \sqrt{2h/g}$$

(где  $h = l' \sin \alpha$ ) в горизонтальном направлении пролетит расстояние  $S = v_{2x}t = \sqrt{\frac{2gh}{g}} \cos \alpha = \sqrt{\left(\frac{2gh}{g}\right)(9 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)} = \sqrt{2(l - S_{1,2}) \sin \alpha / g} = 9,8 \text{ м}.$

Поскольку расстояние по горизонтали от места второго удара до противоположного берега реки

$$L = l' \cos \alpha = (l - S_{1,2}) \cos \alpha = 8 \text{ м},$$

то мячик упадет на другом берегу.

**Ответ:** не упадет; мячик упадет на другом берегу реки.

### Задача №2

Уравнение движения спутника Земли по орбите радиуса  $R$

$$\frac{m^2}{R} = G \frac{m M_3}{R^2}$$

где  $m, M_3$  — масса спутника и масса Земли соответственно.

Следовательно,

$$\frac{m}{R} = G \frac{M_3}{R^2}; \quad \frac{m}{R} = G \frac{M_3}{R^2}$$

Отсюда находим:

$$R = G \frac{M_3}{g} = \frac{R^2}{g} \frac{g}{R}; \quad R = \sqrt{\frac{GM_3}{g}} = 1 \sqrt{\frac{R}{R}} = 1 \frac{R}{R} = 1 \frac{R}{g R^2} = 5,8 \text{ км/с},$$

где учтено, что ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли

$$g = GM_3/R_3^2$$

**Ответ:**  $R = \sqrt{\frac{R}{g}} = 5,8 \text{ км/с}.$

### Задача №3

В циклическом процессе 1-2-4-1 газ получает теплоту при изобарическом расширении 1-2, отдает при изохорическом охлаждении 2-4 и изотермическом сжатии 4-1.

В цикле 2-3-4-2 газ получает теплоту при изотермическом расширении 2-3 и изохорическом нагревании 4-2, отдает при изобарическом сжатии 3-4.

Следовательно, КПД соответствующих циклов

$$\eta_1 = 1 - \frac{|Q_{24}|}{|Q_{41}|} = 1 - \frac{Q_{42}}{Q_{24}}; \quad \eta_2 = 1 - \frac{|Q_{34}|}{|Q_{43}|} = 1 - \frac{Q_{43}}{Q_{34}}$$

Поскольку в изотермических процессах внутренняя энергия газа не меняется, то

$$A_{14} = Q_{14} = (p_1 - p_2)Q_{12} = Q_{24}; \quad A_{23} = Q_{23} = \frac{Q_{43}}{1 - \eta_2} = Q_{42}$$

Так как  $T_1 = T_4$  и  $T_2 = T_3$ , то

$$Q_{12} = \frac{1}{2} R (T_2 - T_1); \quad Q_{43} = \frac{1}{2} R (T_2 - T_1); \quad Q_{42} = \frac{1}{2} R (T_2 - T_1)$$

Следовательно,

$$\frac{A_{23}}{A_{14}} = \frac{\frac{1}{2} R (T_2 - T_1)}{\frac{1}{2} R (T_2 - T_1)} = \frac{5(1 - \eta_1)}{3} = \frac{5}{5(1 - \eta_1)} = \frac{5}{3}$$

**Ответ:**  $\frac{A_{23}}{A_{14}} = \frac{5(1 - \eta_1)}{3} = \frac{5}{3}$ .

### Задача №4

$N$  одинаковых проводящих пластин, расположенных параллельно друг другу на малых расстояниях, представляют собой  $(N - 1)$  одинаковых конденсаторов, соединенных последовательно:

$$C = \frac{C_0}{N - 1}$$

где  $C_0$  — емкость одного конденсатора.

Если каждую третью пластину соединить проводниками с двумя соседними, количество конденсаторов станет равным  $\frac{1}{3}N$  (поскольку  $N = 2013$  делится на 3). Емкость такой системы

$$C' = \frac{C_0}{\frac{1}{3}N} = \frac{3(N - 1)}{N} C = 40,24 \text{ пФ}.$$

**Ответ:**  $C' = \frac{3(N - 1)}{N} C = 40,24 \text{ пФ}.$

### Задача №5

При движении заряженной монеты в магнитном поле на нее будет действовать сила Лоренца. Когда монета соскальзывает с наклонной плоскости, сила Лоренца будет направлена вверх, перпендикулярно плоскости, а при движении монеты вверх сила Лоренца будет направлена вниз, перпендикулярно плоскости (см. рисунки).

Запишем уравнения движения монеты в проекциях на оси системы координат:

$$\begin{aligned} OX: & 0 = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}1}; \quad OY: 0 = mg \cos \alpha - N_1 - F_L; \\ OX: & 0 = mg \sin \alpha + F_{\text{тр}2} - F; \quad OY: 0 = mg \cos \alpha - N_2 + F_L, \end{aligned}$$

где  $F_{\text{тр}1} = N_1 \mu$ ;  $F_{\text{тр}2} = N_2 \mu$ ;  $F_L = qvB$ .

Отсюда получим:

$$\begin{aligned} N_1 &= mg \cos \alpha - qvB; \quad mg \sin \alpha = (mg \cos \alpha - qvB) \mu; \\ N_2 &= mg \cos \alpha + qvB; \quad F = mg \sin \alpha + (mg \cos \alpha + qvB) \mu; \\ F &= (mg \cos \alpha + qvB) \mu \quad (mg \cos \alpha + qvB) \mu = 2 mg \cos \alpha = 42,4 \text{ мН}. \end{aligned}$$

**Ответ:**  $F = 2 mg \cos \alpha = 42,4 \text{ мН}.$

### Задача №6

Записав формулу тонкой рассеивающей линзы

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F_1}$$

найдем расстояние от линзы до изображения источника света:

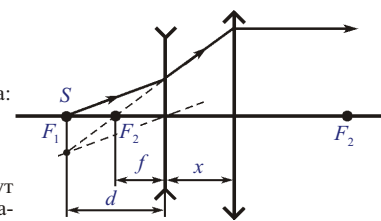
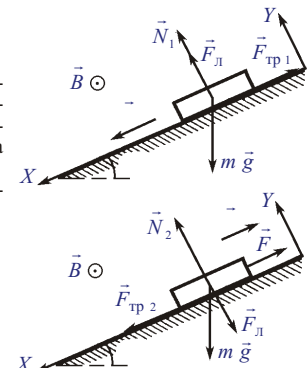
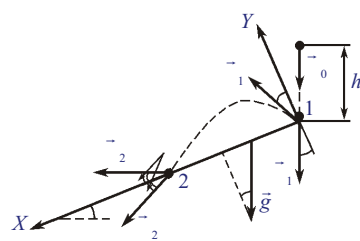
$$f = \frac{d F_1}{d - F_1} = \frac{1}{2} F_1,$$

где учтено, что  $d = F_1$ .

Так как после преломления в собирающей линзе лучи идут параллельным пучком, то изображение, полученное в рассеивающей линзе, находится в фокусе собирающей (см. рисунок). Следовательно,

$$x = F_2 - f = F_2 - \frac{1}{2} F_1 = 15 \text{ см}.$$

**Ответ:**  $x = F_2 - \frac{1}{2} F_1 = 15 \text{ см}.$



## Вариант №2

### Задача №1

Найдем скорость мячика в момент первого удара о землю:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_0^2; \quad v_0 = \sqrt{2gh}$$

Упруго отскочив со скоростью  $v_0$ , мячик будет двигаться по параболе, его координаты будут меняться по законам  $x = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2$ ;  $y = v_0 \cos \alpha t - \frac{1}{2}gt^2$ , а проекции скорости на оси системы координат

$$v_x = v_0 \sin \alpha - gt; \quad v_y = v_0 \cos \alpha - gt$$

В момент второго удара о землю ( $y = 0$ ):

$$0 = v_0 \cos \alpha - gt_{1,2}; \quad t_{1,2} = \frac{v_0 \cos \alpha}{g}$$

Следовательно, время между первым и вторым ударами

$$t_{1,2} = 2 \frac{v_0 \cos \alpha}{g} = 2 \sqrt{\frac{2gh}{g}} \cos \alpha$$

а расстояние между ударами и проекции скорости мячика в момент второго удара

$$S_{1,2} = v_0 \sin \alpha t_{1,2} - \frac{1}{2}gt_{1,2}^2 = 4 \left( \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 \sin \alpha \sqrt{\frac{2gh}{g}} \sin \alpha = 7,2 \text{ м};$$

Законы движения мячика после второго удара:

$$x = v_{2x}t - \frac{1}{2}gt^2; \quad y = v_{2y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

где  $v_{2x} = v_0 \sin \alpha$ ;  $v_{2y} = v_0 \cos \alpha$ . В момент третьего удара мячика ( $y = 0$ ):

$$0 = v_{2y}t_{2,3} - \frac{1}{2}gt_{2,3}^2$$

Следовательно, время между вторым и третьим ударами

$$t_{2,3} = 2 \frac{v_{2y}}{g} = 2 \frac{v_0 \cos \alpha}{g}$$

а расстояние между ними

$$S_{2,3} = v_{2x}t_{2,3} - \frac{1}{2}gt_{2,3}^2 = 8 \left( \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 \sin \alpha \sqrt{\frac{2gh}{g}} \sin \alpha = 14,4 \text{ м}.$$

Аналогично,

$$S_{3,4} = 12 \left( \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 \sin \alpha \sqrt{\frac{2gh}{g}} \sin \alpha = 21,6 \text{ м}.$$

Поскольку  $l = S_{1,2} + S_{2,3} + S_{3,4}$ , то мячик последний раз ударится от воды на расстоянии

$$L = l \left( \frac{S_{1,2}}{S_{1,2} + S_{2,3} + S_{3,4}} \right) = 3,4 \text{ м}.$$

Ответ:  $L = 3,4 \text{ м}$ .

### Задача №2

При вращении Земли на тело действуют сила тяжести  $m\vec{g}$  и сила реакции  $\vec{N}$ .

Запишем уравнение движения тела в проекции на оси системы координат в виде

$$OX: m^2 r - mg \cos \alpha = N_x; \quad OZ: 0 = mg \sin \alpha - N_z$$

где  $r = R_3 \cos \alpha$ ;  $\omega = 2\pi/T$  угловая скорость Земли ( $T$  длительность суток);  $N_x, N_z$  проекции силы реакции  $N$  на выбранные оси.

Вес тела по величине равен силе реакции:

$$P = \sqrt{N_x^2 + N_z^2} = m \sqrt{(g \cos \alpha - \omega^2 r)^2 + g^2 \sin^2 \alpha} = m \sqrt{g^2 \cos^2 \alpha - 2g\omega^2 r \cos \alpha + \omega^4 r^2 + g^2 \sin^2 \alpha}$$

$$P = mg \sqrt{\cos^2 \alpha - 1 + \frac{4\omega^4 r^2}{g^2 T^4} \sin^2 \alpha} = mg \sqrt{1 - \frac{8\omega^2 r}{g T^2} \cos \alpha + \frac{4\omega^4 r^2}{g^2 T^4} \cos^2 \alpha}$$

Вес тела на полюсе равен силе тяжести:  $P_0 = mg$ . Следовательно,

$$\frac{P_0}{P} = 1 - \frac{8\omega^2 r}{g T^2} \cos \alpha + \frac{4\omega^4 r^2}{g^2 T^4} \cos^2 \alpha = 1,00086$$

Ответ:  $\frac{P_0}{P} = 1,00086$ .

### Задача №3

В цикле 1-3-4-1 газ получает теплоту при изобарическом расширении 1-3, отдает при изохорическом охлаждении 3-4 и изотермическом сжатии 4-1. Следовательно, КПД цикла 1-3-4-1

$$\eta = \frac{Q_{13}}{Q_{13} + Q_{41}}$$

где работа газа за цикл 1-3-4-1

$$A_{1341} = A_{13} + A_{34} + A_{41} = A_{13} + A_{14}$$

Работа газа за цикл 1-2-3-1

$$A_{1231} = A_{12} + A_{23} + A_{31} = A_{23} + A_{13}$$

причем  $A_{23} = nA_{14}$ ;  $A_{1231} = kA_{1341}$ . Следовательно,

$$A_{23} + A_{13} = k(A_{13} + A_{14}); \quad nA_{14} + A_{13} = k(A_{13} + A_{14}); \quad A_{13} = \frac{n-k}{k-1}A_{14}; \quad A_{1341} = \frac{n-1}{k-1}A_{14}$$

Поскольку

$$A_{13} = R(T_3 - T_1); \quad Q_{13} = \frac{1}{2}R(T_3 - T_1)$$

то

$$Q_{13} = \frac{1}{2}A_{13} = \frac{5(n-k)}{2(k-1)}A_{14}$$

Следовательно,

$$\frac{A_{1341}}{Q_{13}} = \frac{2(n-1)}{5(n-k)} = 0,123 = 12,3\%$$

Ответ:  $\frac{2(n-1)}{5(n-k)} = 0,123 = 12,3\%$ .

### Задача №4

При параллельном соединении  $n$  частей проволоки одинаковой длины и сопротивлением  $r$  каждой части:

$$\frac{1}{R} = \frac{n}{r}; \quad R = \frac{r}{n}$$

Следовательно, сопротивление всей проволоки

$$R_0 = nr = n^2 r$$

При параллельном соединении  $N$  частей такой же проволоки:

$$\frac{1}{R'} = \frac{N}{r}; \quad R' = \frac{r}{N} = \frac{R_0}{N^2} = \frac{n^2}{N^2} R_0 = 1 \text{ Ом}$$

где  $r = R_0/n$ .

Ответ:  $R' = R_0/n^2 = 1 \text{ Ом}$ .

### Задача №5

Влетев в однородное магнитное поле с индукцией  $B_1$  перпендикулярно линиям индукции, частица будет двигаться с постоянной по величине скоростью по окружности радиуса  $R_1$ . Записав уравнение движения частицы в виде

$$\frac{mv^2}{R_1} = F_L$$

(где сила Лоренца  $F_L = qvB_1$ ), найдем радиус окружности и период обращения частицы:

$$R_1 = \frac{mv}{qB_1}; \quad T_1 = \frac{2\pi R_1}{v} = \frac{2\pi m}{qB_1}$$

Аналогично в магнитном поле с индукцией  $B_2$ :

$$R_2 = \frac{mv}{qB_2}; \quad T_2 = \frac{2\pi m}{qB_2}$$

Следовательно, вдоль границы раздела полей частица будет двигаться со скоростью

$$v_{cp} = \frac{2R_1}{T_1} = \frac{2R_2}{T_2} = \frac{2m(B_2 - B_1)}{q(B_1 B_2)} = \frac{m(B_1 - B_2)}{qB_1 B_2} = 2 \frac{B_2 - B_1}{B_1 - B_2} = 2 \frac{B_1(n-1)}{B_1(n-1)} = 2 \frac{(n-1)}{(n-1)}$$

Отношение скорости движения частицы к средней скорости  $v_{cp}$  ее перемещения вдоль границы раздела полей

$$= \frac{(n-1)}{2(n-1)} = 7,85$$

Ответ:  $\frac{(n-1)}{2(n-1)} = 7,85$ .

### Задача №6

После преломления в рассеивающей линзе крайние лучи пучка будут идти так, как показано на рисунке.

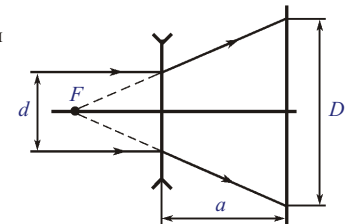
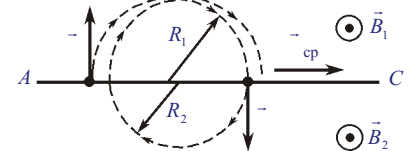
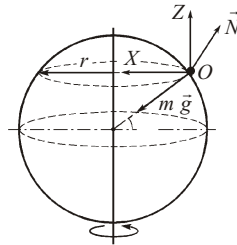
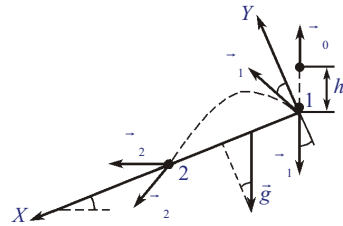
Из подобия треугольников получим:

$$\frac{D}{d} = \frac{a}{F}$$

Следовательно,

$$F = \frac{ad}{D} = 10 \text{ см}$$

Ответ:  $F = 10 \text{ см}$ .



### Вариант №3

#### Задача №1

Пусть удары мячика абсолютно упругие.

В момент первого удара скорость мячика равна  $v_0 = \sqrt{2gh}$ . Отскочив со скоростью  $v_1$ , мячик будет двигаться по параболе, а его координата  $y$  и проекция скорости на ось  $OY$  будут меняться по законам (см. рисунок)

$$y = v_0 \cos \alpha t - \frac{1}{2} g \cos^2 \alpha t^2;$$

$$v_{y1} = v_0 \cos \alpha - g \cos \alpha t.$$

Когда мячик будет находиться в высшей точке траектории относительно плоскости берега ( $v_{y1} = 0$ )

$$h_{\max 1} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{2g} = \frac{2gh \cos^2 \alpha}{2g} = h \cos^2 \alpha,$$

а в момент падения ( $v_{y1} = -v_1$ )

$$0 = v_0 \cos \alpha t_1 - \frac{1}{2} g \cos^2 \alpha t_1^2; \quad v_1 = v_0 \cos \alpha - g \cos \alpha t_1.$$

Следовательно, время подъема на максимальную высоту и максимальная высота подъема мячика над поверхностью берега

$$t_1 = \frac{v_0 \cos \alpha}{g}; \quad h_{\max 1} = \frac{(v_0 \cos \alpha)^2}{2g} = \frac{2gh \cos^2 \alpha}{2g} = h \cos^2 \alpha,$$

а время между первым и вторым ударами и проекция скорости мячика на ось  $OY$

$$t_2 = 2 \frac{v_0 \cos \alpha}{g}; \quad v_{y2} = v_0 \cos \alpha - g \cos \alpha t_2 = -v_0 \cos \alpha.$$

Записав законы движения мячика в проекции на ось  $OY$  после второго удара

$$y = v_1 t - \frac{1}{2} g \cos^2 \alpha t^2; \quad v_{y2} = v_1 - g \cos \alpha t$$

(где  $v_1 = v_0 \cos \alpha$ ) в высшей точке траектории ( $v_{y2} = 0$ )

$$h_{\max 2} = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{(v_0 \cos \alpha)^2}{2g} = h \cos^2 \alpha,$$

получим:

$$t_2 = \frac{v_1}{g \cos \alpha}; \quad h_{\max 2} = \frac{(v_1)^2}{2g} = \frac{(v_0 \cos \alpha)^2}{2g} = h \cos^2 \alpha.$$

Очевидно, что при таком движении траектория мячика будет лежать между плоскостью берега и линией  $AB$  (периодически ее касаясь). Следовательно, в любой момент времени расстояние от мячика до берега, измеренное по горизонтали, не может превышать

$$S = BC = h \operatorname{ctg} \alpha = 1,73 \text{ м.}$$

Поскольку ширина реки  $l > S$ , то мячик обязательно упадет в реку.

Если удары мячика не упругие, то траектория мячика будет лежать в том же коридоре, но не касаясь линии  $AB$ . При этом в любой момент расстояние от мячика до берега, измеренное по горизонтали, будет меньше  $S$ . В этом случае мячик тем более упадет в реку.

**Ответ:** упадет.

#### Задача №2

Уравнение движения тела, находящегося внутри спутника в состоянии невесомости:

$$\frac{m}{R} = m g,$$

где  $g = GM_3/R^2$ ;  $m$  — масса тела;  $R$  — радиус орбиты спутника.

Период обращения спутника вокруг Земли

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{GM_3/R^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM_3}}.$$

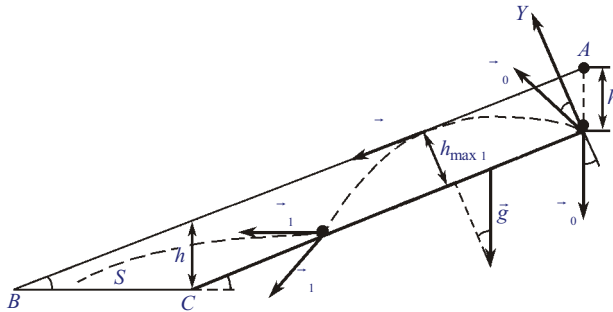
Выразив массу Земли через ее радиус и ускорение свободного падения вблизи поверхности

$$g_0 = GM_3/R^2,$$

получим

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{g_0 R^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g_0}} = 2\pi \sqrt{\frac{R_3}{g}} = 28123 \text{ с.}$$

**Ответ:**  $T = 2\pi \sqrt{\frac{R_3}{g}} = 28123 \text{ с} = 7 \text{ ч } 48 \text{ мин } 43 \text{ с.}$



#### Задача №3

В циклическом процессе 1-2-4-1 газ получает теплоту при изобарическом расширении 1-2, отдает при изохорическом охлаждении 2-4 и изотермическом сжатии 4-1.

В цикле 2-3-4-2 газ получает теплоту при изотермическом расширении 2-3 и изохорическом нагревании 4-2, отдает при изобарическом сжатии 3-4.

Следовательно, КПД соответствующих циклов

$$\eta_1 = \frac{A_1}{Q_{12}}; \quad \eta_2 = \frac{A_2}{Q_{23} + Q_{42}} = \frac{A_2}{A_2 + |Q_{34}|} = \frac{A_2}{A_2 + Q_{43}}.$$

Отсюда получим:

$$A_1 = \eta_1 Q_{12}; \quad A_2 = \frac{\eta_2 Q_{43}}{1 - \eta_2}.$$

Так как  $T_1 = T_4$  и  $T_2 = T_3$ , то

$$Q_{12} = \frac{1}{2} R (T_2 - T_1); \quad Q_{43} = \frac{1}{2} R (T_2 - T_1).$$

Следовательно,

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\eta_2 Q_{43}}{\eta_1 (1 - \eta_2) Q_{12}} = \frac{\eta_2 \frac{1}{2} R (T_2 - T_1)}{\eta_1 (1 - \eta_2) \frac{1}{2} R (T_2 - T_1)} = \frac{\eta_2}{\eta_1 (1 - \eta_2)} = 1,26.$$

**Ответ:**  $\frac{A_2}{A_1} = \frac{\eta_2}{\eta_1 (1 - \eta_2)} = 1,26.$

#### Задача №4

$N$  одинаковых проводящих пластин, расположенных параллельно друг другу на малых расстояниях, представляют собой  $(N - 1)$  одинаковых конденсаторов, соединенных последовательно:

$$C = \frac{C_0}{N - 1},$$

где  $C_0$  — емкость одного конденсатора.

Если каждую вторую пластину убрать, не трогая остальные пластины, то количество конденсаторов станет равным  $\frac{1}{2}(N - 1)$  (поскольку  $N = 2013$  нечетное число), причем емкость каждого конденсатора уменьшится в 2 раза (так как в 2 раза увеличится расстояние между пластинами). Емкость такой системы

$$C' = \frac{\frac{1}{2} C_0}{\frac{1}{2}(N - 1)} = \frac{C_0}{N - 1} = C = 40 \text{ пФ.}$$

**Ответ:**  $C' = C = 40 \text{ пФ.}$

#### Задача №5

При движении заряженной монеты в магнитном поле на нее будет действовать сила Лоренца. Чтобы монета не соскальзывала по плоскости вниз, сила Лоренца должна этому препятствовать. Поэтому монете надо сообщить начальную скорость, направленную так, как показано на рисунке.

Записав уравнение движения монеты в проекции на ось  $OX$

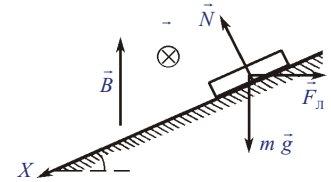
$$0 = m g \sin \alpha - F_L \cos \alpha,$$

получим

$$\frac{m g \sin \alpha}{q B \cos \alpha} = \frac{m g}{q B} \operatorname{tg} \alpha = 8,6 \text{ м/с,}$$

где учтено, что величина силы Лоренца  $F_L = q v B$ .

**Ответ:**  $\frac{m g}{q B} \operatorname{tg} \alpha = 8,6 \text{ м/с.}$



#### Задача №6

Записав формулу тонкой собирающей линзы для случая действительного изображения предмета

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F_1},$$

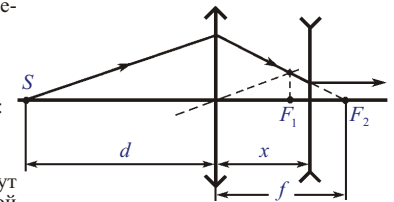
найдем расстояние от линзы до изображения источника света:

$$f = \frac{d F_1}{d - F_1}.$$

Так как после преломления в рассеивающей линзе лучи идут параллельным пучком, то они падали в направлении фокуса этой линзы, расположенного за линзой (см. рисунок). Следовательно,

$$x = f - F_2 = \frac{d F_1}{d - F_1} - F_2 = 10 \text{ см.}$$

**Ответ:**  $x = \frac{d F_1}{d - F_1} - F_2 = 10 \text{ см.}$



## Вариант №4

### Задача №1

В момент первого удара о землю скорость мячика равна  $v_0 = \sqrt{2gh}$ .

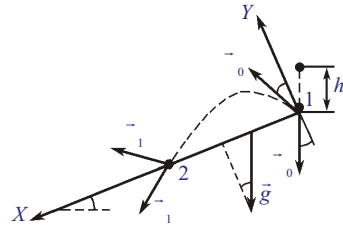
Отскочив со скоростью  $v_0$ , мячик будет двигаться по параболе, его координаты будут меняться по законам  $x = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2$ ;  $y = v_0 \cos \alpha t - \frac{1}{2}gt^2$ , а проекции скорости на оси системы координат  $v_x = v_0 \sin \alpha - gt$ ;  $v_y = v_0 \cos \alpha - g$ .

В момент второго удара о землю ( $x = S_{1,2}$ ;  $y = 0$ ):

$$S_{1,2} = v_0 \sin \alpha t_{1,2} - \frac{1}{2}gt_{1,2}^2;$$

$$0 = v_0 \cos \alpha t_{1,2} - \frac{1}{2}gt_{1,2}^2;$$

Следовательно, время между первым и вторым ударами  $t_{1,2} = 2v_0 \cos \alpha / g$ .



а расстояние между ударами и проекции скорости мячика в момент второго удара

$$S_{1,2} = v_0 \sin \alpha t_{1,2} - \frac{1}{2}gt_{1,2}^2 = 4(v_0 \cos \alpha)^2 \sin \alpha / g = 8h \sin \alpha \cos^2 \alpha;$$

$$v_{1x} = v_0 \sin \alpha - gt_{1,2} = 3v_0 \sin \alpha \cos \alpha; \quad v_{1y} = v_0 \cos \alpha - \frac{1}{2}gt_{1,2} = v_0 \cos \alpha - \frac{1}{2}g \cdot \frac{2v_0 \cos \alpha}{g} = -v_0 \cos \alpha.$$

Законы движения мячика после второго удара:

$$x = v_{1x}t - \frac{1}{2}gt^2; \quad y = v_{1y}t - \frac{1}{2}gt^2,$$

где  $v_{1x} = 3v_0 \sin \alpha \cos \alpha$ ;  $v_{1y} = -v_0 \cos \alpha$ . В момент третьего удара мячика ( $y = 0$ ):

$$0 = v_{1y}t_{2,3} - \frac{1}{2}gt_{2,3}^2.$$

Следовательно, время между вторым и третьим ударами

$$t_{2,3} = 2|v_{1y}|/g = 2v_0 \cos \alpha / g = t_{1,2}.$$

а расстояние между ними

$$S_{2,3} = v_{1x}t_{2,3} - \frac{1}{2}gt_{2,3}^2 = 16h \sin \alpha \cos^2 \alpha = 4,8 \text{ м}.$$

Аналогично,

$$S_{3,4} = 24h \sin \alpha \cos^2 \alpha = 7,2 \text{ м}; \quad S_{4,5} = 32h \sin \alpha \cos^2 \alpha = 9,6 \text{ м}; \quad \dots$$

Поскольку

$$S_{1,2} = S_{2,3} = S_{3,4} = 14,4 \text{ м}; \quad S_{1,2} + S_{2,3} + S_{3,4} + S_{4,5} = 24 \text{ м},$$

а расстояние до воды  $l = 16 \text{ м}$ , то мячик ударится о землю  $n = 4$  раза.

**Ответ:**  $n = 4$ .

### Задача №2

Поскольку сила притяжения обоих тел к Земле одинакова, то разница в их весе связана с различным расстоянием от тел до центра Луны, и, следовательно, различной силой притяжения к Луне. Учитывая, что силы притяжения тел Луной направлены в одну сторону, разница в весе тел

$$P = G \frac{m M_{\text{Л}}}{(R_{\text{Л-3}} - R_3)^2} - G \frac{m M_{\text{Л}}}{(R_{\text{Л-3}} + R_3)^2}.$$

Поскольку  $R_{\text{Л-3}} \gg R_3$ , то

$$P \approx G m M_{\text{Л}} \frac{R_{\text{Л-3}}^2 - 2R_{\text{Л-3}}R_3 + R_3^2 - (R_{\text{Л-3}}^2 + 2R_{\text{Л-3}}R_3 + R_3^2)}{(R_{\text{Л-3}}^2 - R_3^2)^2} = G m M_{\text{Л}} \frac{2(R_{\text{Л-3}} - R_3)(-R_3)}{(R_{\text{Л-3}}^2 - R_3^2)^2} = \frac{2G m M_{\text{Л}}}{R_{\text{Л-3}}^2}.$$

Записав уравнение движения Луны вокруг Земли

$$M_{\text{Л}} \frac{v^2}{R_{\text{Л-3}}} = G \frac{M_{\text{З}} M_{\text{Л}}}{R_{\text{Л-3}}^2}$$

с учетом, что  $v = 2\pi R_{\text{Л-3}}/T$ , получим:

$$\frac{4\pi^2 R_{\text{Л-3}}}{T^2} = G \frac{M_{\text{З}}}{R_{\text{Л-3}}^2}; \quad R_{\text{Л-3}} = \sqrt[3]{G \frac{M_{\text{З}} T^2}{4\pi^2}};$$

$$P = 2G m M_{\text{Л}} \frac{4\pi^2}{G M_{\text{З}} T^2} = 2G m M_{\text{Л}} \frac{4\pi^2}{g R_3^2 T^2} = 6,65 \cdot 10^{-5} \text{ Н},$$

где учтено, что

$$g = G M_{\text{З}}/R_3^2.$$

**Ответ:**  $P = 2G m M_{\text{Л}} \frac{4\pi^2}{g R_3^2 T^2} = 6,65 \cdot 10^{-5} \text{ Н}.$

### Задача №3

В циклическом процессе 1-2-3-1 газ получает теплоту при изохорическом нагревании 1-2 и изотермическом расширении 2-3, отдает при изобарическом сжатии 3-1.

В цикле 1-3-4-1 газ получает теплоту при изобарическом расширении 1-3, отдает при изохорическом охлаждении 3-4 и изотермическом сжатии 4-1.

Следовательно, КПД соответствующих циклов

$$\eta_1 = 1 - \frac{|Q_{31}|}{Q_{12} + Q_{23}} = 1 - \frac{Q_{13}}{Q_{12} + Q_{23}}; \quad \eta_2 = 1 - \frac{|Q_{41}|}{Q_{13} + Q_{34}} = 1 - \frac{Q_{43} + Q_{41}}{Q_{13} + Q_{34}}.$$

Поскольку в изотермических процессах внутренняя энергия газа не меняется, то

$$A_{23} = Q_{23} = \frac{Q_{13}}{1 - \eta_1}; \quad A_{14} = Q_{14} = (1 - \eta_2)Q_{13} = Q_{43}.$$

Так как  $T_1 = T_4$  и  $T_2 = T_3$ , то

$$Q_{12} = \frac{5}{2} R (T_2 - T_1); \quad Q_{43} = \frac{5}{2} R (T_2 - T_1); \quad Q_{13} = \frac{5}{2} R (T_2 - T_1).$$

Следовательно,

$$\eta = \frac{A_{23} + A_{14}}{A_{14} + Q_{12} + Q_{23}} = \frac{\frac{5}{2} R (T_2 - T_1) + \frac{5}{2} R (T_2 - T_1)}{\frac{5}{2} R (T_2 - T_1) + \frac{5}{2} R (T_2 - T_1) + \frac{5}{2} R (T_2 - T_1)} = \frac{5}{5 + 5} = 0,5.$$

**Ответ:**  $\eta = \frac{5}{10} = 0,5 = 50\%.$

### Задача №4

При параллельном соединении  $n = 3$  частей провода сопротивлением  $R_1 = R/n$  каждой части общее сопротивление

$$\frac{1}{R'} = \frac{n}{R_1}; \quad R' = \frac{R_1}{n} = \frac{R}{n^2}.$$

При замыкании получившимся проводником источника ток через источник

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R' + r} = \frac{\mathcal{E}}{\frac{R}{n^2} + r} = \frac{n^2 \mathcal{E}}{R + n^2 r} = 0,09 \text{ А}.$$

**Ответ:**  $I = \frac{n^2 \mathcal{E}}{R + n^2 r} = 0,09 \text{ А}.$

### Задача №5

Влетев в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции, электрон будет двигаться с постоянной по величине скоростью по дуге окружности радиуса  $r$ . Записав уравнение движения частицы в виде

$$m \frac{v^2}{r} = F_{\text{Л}}$$

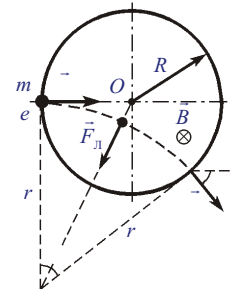
(где сила Лоренца  $F_{\text{Л}} = |e| v B$ ), получим

$$r = \frac{m v}{|e| B}.$$

Пройдя область внутри соленоида, электрон изменит направление своего движения на угол  $\alpha$  (см. рисунок), причем

$$\alpha = 2 \arctg \left( \frac{R}{r} \right) = 2 \arctg \left( \frac{|e| B R}{m v} \right) = 55,7^\circ.$$

**Ответ:**  $\alpha = 2 \arctg \left( \frac{|e| B R}{m v} \right) = 55,7^\circ.$



### Задача №6

На рисунке сплошными линиями изображен ход лучей после преломления в рассеивающей линзе, штриховыми в собирающей, где учтено, что расстояние  $a$  от линзы до экрана больше фокусного расстояния линз (см. ниже).

В случае рассеивающей линзы из подобия треугольников получим

$$\frac{D}{d} = \frac{a}{F},$$

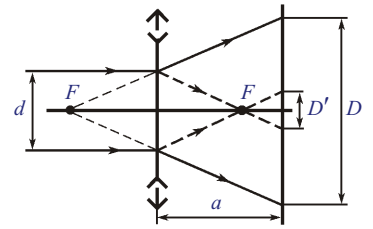
а в случае собирающей

$$\frac{D'}{d} = \frac{a}{F}.$$

Следовательно,

$$a = \frac{(D + D')d}{F} = \frac{1}{2} F; \quad D' = d \frac{a}{F} = 1; \quad D = \frac{D}{d} d = 1; \quad D + D' = 2 \text{ см}.$$

**Ответ:**  $D + D' = 2 \text{ см}.$



## Вариант №1

### Задача №1

Дальность полета тела, брошенного под углом к горизонту,

$$S = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Следовательно, минимальная начальная скорость тела, необходимая для его броска на расстояние  $S$ , будет при условии  $\sin 2\alpha = 1$ :

$$v_{0 \min} = \sqrt{gS}$$

Поскольку, по условию задачи

$$\frac{m_B^2}{2} = n \frac{m_A^2}{2}$$

(где  $v_B, v_A, v_{0 \min}$  — начальные скорости костей, брошенных Базилио и Алисой соответственно), то

$$v_B = \sqrt{n} v_A = \sqrt{ngS}$$

Так как Алиса и Базилио сидели на равных расстояниях от кувшина, то

$$\frac{v_A^2}{g} \sin 2\alpha_B = \frac{v_B^2}{g} \sin 2\alpha_A; \quad \frac{gS}{n} = \frac{ngS \sin 2\alpha_B}{g}; \quad n \sin 2\alpha_B = 1;$$

$$\alpha_B = \frac{1}{2} \arcsin(1/n) = 15^\circ \text{ или } \alpha_B = \frac{1}{2}[90^\circ - \arcsin(1/n)] = 75^\circ.$$

**Ответ:**  $\alpha_B = \frac{1}{2} \arcsin(1/n) = 15^\circ$  или  $\alpha_B = \frac{1}{2}[90^\circ - \arcsin(1/n)] = 75^\circ$ .

### Задача №2

Уравнение движения летчика в проекции на ось  $OX$ , направленную к центру кривизны траектории, и вертикальную ось  $OZ$  (см. рисунок):

$$\frac{m}{R} N_x; \quad 0 = N_z - mg,$$

где  $N_x, N_z$  — проекции силы реакции на соответствующие оси.

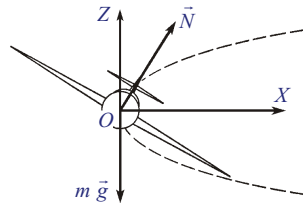
Поскольку вес летчика численно равен силе реакции, то

$$P = N = \sqrt{N_x^2 + N_z^2} = \sqrt{\frac{m^2 v^4}{R^2} + m^2 g^2}.$$

Следовательно, перегрузка летчика

$$n = \frac{P}{mg} = \sqrt{\frac{v^4}{g^2 R^2} + 1} = 2,74.$$

**Ответ:**  $n = \frac{P}{mg} = \sqrt{\frac{v^4}{g^2 R^2} + 1} = 2,74$ .



### Задача №3

На основании теоремы об изменении механической энергии

$$E_2 = E_1 + A(F_{\text{сопр}}),$$

где начальная энергия самолета относительно уровня посадочной полосы

$$E_1 = \frac{m v_0^2}{2} + mgh,$$

энергия самолета на уровне посадочной полосы

$$E_2 = \frac{m v^2}{2},$$

работа сил сопротивления воздуха

$$A(F_{\text{сопр}}) = A.$$

Следовательно,

$$\frac{m v^2}{2} = \frac{m v_0^2}{2} + mgh + A; \quad \sqrt{\frac{2}{g} (2gh + 2A/m)} = 26,1 \text{ м/с.}$$

**Ответ:**  $\sqrt{\frac{2}{g} (2gh + 2A/m)} = 26,1 \text{ м/с.}$

## Задача №4

Пусть  $V_0$  и  $V$  — внешний и внутренний объемы стакана соответственно,  $m$  — масса стакана. Условия плавания пустого стакана и стакана, частично заполненного водой, а затем медом:

$$m g = F_{\text{Арх1}}; \quad (m + m_B) g = F_{\text{Арх2}}; \quad (m + m_M) g = F_{\text{Арх3}},$$

где массы воды и меда в стакане

$$m_B = \rho_B V; \quad m_M = \rho_M (\frac{1}{2} V),$$

а силы Архимеда

$$F_{\text{Арх1}} = \rho_B g V_0; \quad F_{\text{Арх2}} = \rho_B g V_0; \quad F_{\text{Арх3}} = \rho_B g V_0.$$

Следовательно,

$$m g = \rho_B g V_0; \quad (m + \rho_B V) g = \rho_B g V_0; \quad (m + \frac{1}{2} \rho_M V) g = \rho_B g V_0;$$

$$m = \rho_B V_0; \quad m + \rho_B V = \rho_B V_0; \quad m + \frac{1}{2} \rho_M V = \rho_B V_0;$$

$$V = V_0 (1 - \frac{m}{\rho_B V}); \quad \frac{1}{2} \rho_M V = \rho_B (V_0 - V);$$

$$m = \rho_B \frac{2(V_0 - \frac{1}{2} \rho_M V)}{1} = 1,56 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

**Ответ:**  $m = \rho_B \frac{2(V_0 - \frac{1}{2} \rho_M V)}{1} = 1,56 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

## Задача №5

Запишем уравнение Менделеева — Клапейрона для газа в отсеке в двух состояниях в виде

$$PV = \nu RT; \quad (1 - n)PV = \nu R(1 - k)T,$$

где  $\nu, \nu'$  — количества газа в отсеке до пробойны и после ее заделки. Следовательно, отсек потерял часть газа

$$x = \frac{1 - \frac{1}{1 - \frac{n}{k}}}{1 - \frac{1}{1 - \frac{n}{k}}} = \frac{1}{30}.$$

**Ответ:**  $x = \frac{n}{1 - \frac{n}{k}} = \frac{1}{30}$ .

## Задача №6

При доливании в калориметр со льдом минимального количества воды, чтобы в калориметре установилась температура  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ , лед нагреется до температуры  $t_0$ , получив количество теплоты

$$Q_{\text{пол1}} = m_L c_L (t_0 - t_L)$$

(где  $m_L, t_L$  — масса и первоначальная температура льда), а вода остынет до температуры  $t_0$  и замерзнет, отдав количество теплоты

$$Q_{\text{отд1}} = m_B c_B (t_1 - t_0) = m_B.$$

При доливании в калориметр второй порции воды массой  $M_B = 5m_B$  лед растает, получив количество теплоты

$$Q_{\text{пол2}} = (m_L + m_B),$$

а вода остынет до температуры  $t_0$ , отдав количество теплоты

$$Q_{\text{отд2}} = M_B c_B (t_2 - t_0) = 5m_B c_B (t_2 - t_0).$$

На основании уравнения теплового баланса ( $Q_{\text{пол1}} + Q_{\text{отд1}} = Q_{\text{пол2}} + Q_{\text{отд2}}$ ):

$$m_L c_L (t_0 - t_L) + m_B c_B (t_1 - t_0) = m_B; \quad (m_L + m_B) = 5m_B c_B (t_2 - t_0).$$

Отсюда находим:

$$m_L = \frac{5m_B c_B (t_2 - t_0) - m_B}{c_L}; \quad \frac{5m_B c_B (t_2 - t_0) - m_B}{c_L} c_L (t_0 - t_L) + m_B c_B (t_1 - t_0) = m_B;$$

$$t_L - t_0 = \frac{c_B (t_1 - t_0)}{c_L + 5c_B (t_2 - t_0)} = 33,65^\circ\text{C}.$$

**Ответ:**  $t_L - t_0 = \frac{c_B (t_1 - t_0)}{c_L + 5c_B (t_2 - t_0)} = 33,65^\circ\text{C}.$

## Вариант №1

### Задача №1

Поскольку тропинка была не скользкая, то колобок катился без проскальзывания. Поэтому линейные скорости  $v_{\text{вращ}}$  точек на поверхности колобка относительно его центра и скорость центра колобка  $v_{\text{к}}$  равны по величине, т.е.

Так как по условию задачи скорость колобка в  $n$  раз больше скорости волка

$$v_{\text{к}} = n v_{\text{вращ}}$$

Следовательно,

$$v_{\text{к}} = \frac{n}{n-1} v_{\text{вращ}}$$

За  $t = 1$  с нос колобка относительно центра «проходил путь»

$$S = D,$$

где  $D$  — диаметр колобка. Следовательно,

$$S_{\text{вращ}} = v_{\text{к}} t; \quad D = \frac{n}{n-1} v_{\text{к}} t; \quad D = \frac{n}{(n-1)} v_{\text{к}} t = 40 \text{ см.}$$

**Ответ:**  $D = \frac{n}{(n-1)} v_{\text{к}} t = 40 \text{ см.}$

### Задача №2

На основании закона сохранения энергии

$$\frac{m v_2^2}{2} = \frac{m v_1^2}{2} + m g R,$$

где  $R$  — радиус петли;  $v_1, v_2$  — скорости планера в верхней точке петли Нестерова и в момент времени, когда скорость планера направлена вертикально (см. рисунок).

Уравнения движения пилота в соответствующих точках в проекции на ось, направленную к центру кривизны траектории:

$$\frac{m v_1^2}{R} = m g + N_1; \quad \frac{m v_2^2}{R} = N_2,$$

где  $N_1 = m g, N_2$  — силы реакции сидения, по величине равные силам, с которыми пилот к нему прижимается, т.е. весу пилота.

Следовательно,

$$\frac{R N_2}{2} = \frac{2 R m g}{2} + m g R; \quad N_2 = 4 m g.$$

Искомый коэффициент перегрузки

$$n = \frac{N_2}{m g} = 4.$$

**Ответ:**  $n = 4.$

### Задача №3

В момент прохождения равновесия скорость тела максимальна и равна

$$v_{\text{max}} = A \sqrt{k/m},$$

где  $\sqrt{k/m}$  — циклическая частота колебаний.

Под действием импульса силы  $F t$  тело приобретет импульс

$$m v_1 = F t = m v_{\text{max}},$$

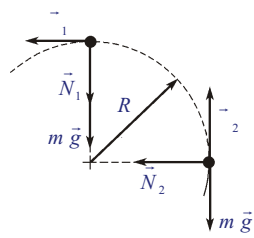
т.е. скорость

$$v_1 = \frac{F t}{m} = v_{\text{max}}.$$

На основании закона сохранения энергии

$$\frac{m v_1^2}{2} = \frac{k A_1^2}{2},$$

где  $A_1$  — новая амплитуда колебаний.



Следовательно,

$$A_1 = \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{F t}{m} = \frac{F t}{\sqrt{m k}} = A.$$

Аналогично, после второго действия импульса силы  $F t$ :

$$A_2 = \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{F t}{m} + \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{F t}{m} = 2 \frac{F t}{\sqrt{m k}} = 2 A.$$

Следовательно, после  $N$  действий импульса силы амплитуда колебаний

$$A_N = N \frac{F t}{\sqrt{m k}} = A \cdot 7,4 \text{ см.}$$

**Ответ:**  $A_N = N \frac{F t}{\sqrt{m k}} = A \cdot 7,4 \text{ см.}$

### Задача №4

В циклических процессах 1-2-3-1 и 1-2-4-1 газ получает теплоту на участке 1-2. Поэтому КПД соответствующих циклов

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{н}}}; \quad \eta' = \frac{A'}{Q_{\text{н}}'}$$

Поскольку площадь треугольника 1-2-3 (см. рисунок)

$$S_{1-2-3} = 2 l h,$$

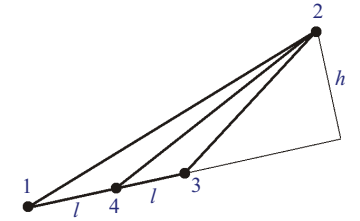
площадь треугольника 1-2-4

$$S_{1-2-4} = l h,$$

а работы за циклы численно равны этим площадям, то

$$\eta' = \frac{1}{2} = 10\%.$$

**Ответ:**  $\eta' = \frac{1}{2} = 10\%.$



### Задача №5

Сила натяжения нити по величине равна силе Кулона. Следовательно,

$$T_1 = k \frac{q_1^2}{l^2}; \quad T_2 = k \frac{q_2^2}{l^2}; \quad T = k \frac{q_1 q_2}{l^2},$$

где  $l$  — длина нити.

Отсюда получим:

$$q_1 = l \sqrt{T_1/k}; \quad q_2 = l \sqrt{T_2/k}; \quad T = \sqrt{T_1 T_2} = 10 \text{ мН.}$$

**Ответ:**  $T = \sqrt{T_1 T_2} = 10 \text{ мН.}$

### Задача №6

В силу симметрии задачи, ток через сопротивление  $3R$  не течет.

Токи через сопротивления  $R$  и  $2R$

$$I_R = I_{2R} = \frac{\mathcal{E}}{R + 2R} = \frac{\mathcal{E}}{3R} = 0,4 \text{ А,}$$

а ток через источник

$$I = 2 I_R = 0,8 \text{ А.}$$

**Ответ:**  $I_R = I_{2R} = \frac{\mathcal{E}}{3R} = 0,4 \text{ А; } I_{3R} = 0; I = 0,8 \text{ А.}$

