

Вариант 1. Решение

Задача 1. Найдите количество натуральных чисел n , не превосходящих 1000, для которых выполнено $\text{НОД}(n, 65) = 13$

Ответ: 61.

Решение. Число n делится на 13 и не делится на 5. Количество чисел, делящихся на 13 и не превосходящих 1000, равно

$$\lfloor 1000/13 \rfloor = 76.$$

Из них делятся на 5:

$$\lfloor 76/5 \rfloor = 15.$$

Следовательно, количество подходящих n равно

$$76 - 15 = 61.$$

Задача 2. При каких n можно разбить n -угольник непересекающимися диагоналями на 5-угольники и 9-угольники так, чтобы количество 5-угольников было в 3 раза больше количества 9-угольников?

Ответ: $16k + 2$.

Решение. Пусть количество 9-угольников равно k . Тогда количество 5-угольников равно $3k$. Разобьем каждый 9-угольник диагоналями на 7 треугольников, каждый 5-угольник – на 3 треугольника. В результате получится

$$7 \cdot k + 3 \cdot 3k = 16k$$

треугольников разбиения.

Пример для $16k + 2$ -угольника: нужно последовательно отрезать 9-угольники и 5-угольники так, чтобы на каждом шагу все стороны отрезаемой фигуры, кроме одной, были сторонами многоугольника. После отрезания 9-угольника количество сторон уменьшается на 7, после отрезания 5-угольника – на 3.

Задача 3. В фирме работает 150 человек с одинаковой производительностью труда. Требуется создать коллектив для работы над срочным проектом. Известно, что если в коллективе работает k человек, то каждый из них каждый час прерывает работу на $2(k-1)$ минут, чтобы обсудить с коллегами план действий. При каком количестве человек в коллективе проект будет выполнен в кратчайшие сроки? Найдите все возможные ответы.

Ответ: 15 или 16.

Решение. Суммарная производительность равна

$$k(60 - 2(k - 1)) = -2(k^2 - 31k).$$

Ближайшие к вершине параболы целые точки – 15 и 16.

Задача 4. В языковом клубе есть группы английского, французского и испанского. Каждый член клуба входит в одну или две группы.

Половина изучающих английским занимаются дополнительно французским. Четверть изучающих английский занимается испанским.

Треть изучающих французский занимается английским. Шестая изучающих французский занимается испанским.

Десятая часть изучающих испанский занимается английским. Какая доля изучающих испанский занимается французским?

Ответ: $1/10$.

Решение. Пусть группу изучения английского языка посещает a человек, французского – b человек, испанского – c человек.

Количество человек, занимающихся английским и французским, равно

$$\frac{1}{2}a = \frac{1}{3}b \Rightarrow b = \frac{3}{2}a.$$

Количество человек, занимающихся английским и испанским, равно

$$\frac{1}{4}a = \frac{1}{10}c \Rightarrow a = \frac{2}{5}c.$$

Получаем, что

$$b = \frac{3}{2}a = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5}c = \frac{3}{5}c.$$

Количество человек, занимающихся французским и испанским, равно

$$\frac{1}{6}b = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5}c = \frac{1}{10}c.$$

Задача 5. Решите уравнение $|\log_3(243x^4)| - \log_3|81x^3| = 12$.

Ответ: $\pm 3^{11}$ и $\pm 3^{-3}$.

Решение. Сначала приведем уравнение к следующему виду

$$|1 + \log_3((3x)^4)| - (1 + \log_3(|3x|^3)) = 12.$$

Заметим, что $(3x)^4 = |3x|^4$. Сделаем замену $\log_3|3x| = t$. После замены уравнение принимает вид

$$|1 + 4t| - 3t = 13.$$

Если $1 + 4t \geq 0$ или при $t \geq -1/4$, то решение имеет вид $t = 12$.

При $t < -1/4$ имеем

$$-7t = 14 \quad \Rightarrow \quad t = -2.$$

После обратной замены имеем

1. $t = 12 \quad \Rightarrow \quad \log_3|3x| = 12$. Следовательно, $x = \pm 3^{11}$.

2. $t = -2 \quad \Rightarrow \quad \log_3|3x| = -2$. Следовательно, $x = \pm 3^{-3}$.

Задача 6. Решите уравнение

$$\cos^6 x + \sin^6 x = 4 \sin^2 2x$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2}n \pm \frac{1}{4} \arccos \frac{11}{19}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Преобразуем уравнение, используя формулы понижения степени и основное тригонометрическое тождество

$$\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^3 + \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^3 = 4(1 - \cos^2 2x).$$

Упрощая, получаем

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos^2 2x = 4 - 4 \cos^2 2x.$$

Понижая степень еще раз, имеем

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{8}(1 + \cos 4x) = 4 - 2(1 + \cos 4x)$$

или

$$\cos 4x = \frac{11}{19}.$$

Следовательно,

$$4x = 2\pi n \pm \arccos \frac{11}{19}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

или

$$x = \frac{\pi}{2}n \pm \frac{1}{4} \arccos \frac{11}{19}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Задача 7. При каких значениях параметра a многочлены

$$f(x) = x^3 + x^2 - ax - (2a^2 + 64), \quad g(x) = x^3 + 2x^2 - 2ax - (4a^2 + 64)$$

имеют общий корень?

Ответ: $2, -4$.

Решение. Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ имеют общий корень тогда и только тогда, когда многочлены $f(x)$ и $g(x) - f(x)$ имеют общий корень. Вычтем и разложим на множители:

$$g(x) - f(x) = x^2 - ax - 2a^2 = (x - 2a)(x + a).$$

Корни многочлена $g(x) - f(x)$ равны $2a$ и $-a$. Значит, искомые значения a — те, для которых выполнено $f(2a) = 0$ или $f(-a) = 0$. Подставим:

$$f(2a) = 8a^3 - 64, \quad f(a) = -a^3 - 64.$$

Равенство $f(2a) = 0$ выполнено при $a = 2$, равенство $f(-a) = 0$ — при $a = -4$.

Задача 8. Числа a и b — не целые. Известно, что $ab = [a][b] = -5$. Докажите, что $\{a\} \leq 6\{b\}$.

(Квадратные скобки обозначают целую часть числа, фигурные скобки обозначают дробную часть числа.)

Доказательство. Положим $x = \{a\}$, $y = \{b\}$. Нужно доказать, что $x \leq 6y$. Известно, что $x, y \in (0, 1)$.

Числа $[a]$ и $[b]$ — целые, их произведение равно -5 . Значит, есть четыре случая:

1) $a = 1, b = -5$;

2) $a = -5, b = 1$;

3) $a = -1, b = 5$;

4) $a = 5, b = -1$.

Равенство

$$([a] + x)([b] + y) = -5$$

с учетом равенства $[a][b] = -5$ можно записать как

$$[a]y + [b]x + xy = 0.$$

Рассмотрим это равенство для каждого из четырех случаев.

1) $y - 5x + xy = 0$

В этом случае $x = \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}xy < \frac{2}{5}y < 6y$.

2) $-5y + x + xy = 0$

В этом случае $x = (5 - x)y < 6y$.

3) $-y + 5x + xy = 0$

В этом случае $x = \frac{1}{5}(y - x) < 6y$.

4) $5y - x + xy = 0$

В этом случае $x = 5y + xy < 5y + y = 6y$.

Таким образом, во всех четырех случаях выполняется неравенство $\{a\} \leq 6\{b\}$.

Задача 9. Функция $f(x)$ определена на интервале $(-1; 1)$. Известно, что функция $g(x)$, заданная равенством

$$g(x) = 2f(\sin x) + 3f(\cos x)$$

ограничена. Докажите, что функция $f(x)$ тоже ограничена.

Доказательство. Пусть $|g(x)| \leq R$ для любого x .

Сделаем замену $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ и воспользуемся формулами приведения:

$$\begin{cases} 2f(\sin x) + 3f(\cos x) = g(x) \\ 3f(\sin x) + 2f(\cos x) = g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{cases}.$$

Найдем $f(\sin x)$ из системы уравнений:

$$f(\sin x) = \frac{3g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2g(x)}{5}.$$

Получаем, что функция $|f(\sin x)| \leq R$ для любого x . При этом множество значений функции $f(\sin x)$ совпадает с множеством значений функции $f(x)$.

Задача 10. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 = (y - z)^2 - 8, \\ y^2 = (z - x)^2 - 16, \\ z^2 = (x - y)^2 + 32. \end{cases}$$

Ответ: $(1, 3, 6), (-1, -3, -6)$.

Решение. Соберем все квадраты в левых частях уравнений

$$\begin{cases} x^2 - (y - z)^2 = -8, \\ y^2 - (z - x)^2 = -16, \\ z^2 - (x - y)^2 = 32 \end{cases}$$

и воспользуемся формулой разность квадратов

$$\begin{cases} (x - y + z)(x + y - z) = -8, \\ (y - z + x)(y + z - x) = -16, \\ (z - x + y)(z + x - y) = 32. \end{cases}$$

Делая замену переменных

$$x - y + z = A, \quad x + y - z = B, \quad x - y - z = C,$$

получаем

$$AB = -8 = -2^3, \quad -BC = -16 = -2^4, \quad -AC = 32 = 2^5.$$

Следовательно, $(ABC)^2 = 2^{12}$ и $ABC = \pm 2^6 = \pm 64$.

Если $ABC = 64$, то $C = -8$, $A = 4$, $B = -2$ или

$$\begin{cases} x - y - z = -8, \\ x - y + z = 4, \\ x + y - z = -2. \end{cases}$$

Решая данную систему, получаем $x = 1$, $y = 3$, $z = 6$.

При $ABC = -64$ имеем $x = -1$, $y = -3$, $z = -6$.

Вариант 2. Решение

Задача 1. Найдите количество натуральных чисел n , не превосходящих 1000, для которых выполнено $\text{НОД}(n, 105) = 35$.

Ответ: 19.

Решение. Число n делится на 35 и не делится на 3. Количество чисел, делящихся на 35 и не превосходящих 1000, равно

$$\lfloor 1000/35 \rfloor = 28.$$

Из них делятся на 3:

$$\lfloor 28/3 \rfloor = 9.$$

Следовательно, количество подходящих n равно

$$28 - 9 = 19.$$

Задача 2. При каких n можно разбить n -угольник непересекающимися диагоналями на 6-угольники и 7-угольники так, чтобы количество 6-угольников было в 2 раза меньше количества 7-угольников?

Ответ: $14k + 2$.

Решение. Пусть количество 6-угольников равно k . Тогда количество 7-угольников равно $2k$. Разобьем каждый 6-угольник диагоналями 4 треугольника, каждый 7-угольник – на 5 треугольников. В результате получится

$$4 \cdot k + 5 \cdot 2k = 14k$$

треугольников разбиения.

Пример для $14k + 2$ -угольника: нужно последовательно отрезать 6-угольники и 7-угольники так, чтобы на каждом шагу все стороны отрезаемой фигуры, кроме одной, были сторонами многоугольника. После отрезания 6-угольника количество сторон уменьшается на 4, после отрезания 7-угольника – на 5.

Задача 3. В фирме работает 100 человек с одинаковой производительностью труда. Требуется создать коллектив для работы над срочным проектом. Известно, что если в коллективе работает k человек, то каждый из них каждый час прерывает работу на $3(k-1)$ минут, чтобы обсудить с коллегами план действий. При каком количестве человек в коллективе проект будет выполнен в кратчайшие сроки? Найдите все возможные ответы.

Ответ: 10 или 11.

Решение. Суммарная производительность равна

$$k(60 - 3(k-1)) = -3(k^2 - 21k).$$

Ближайшие к вершине параболы целые точки – 10 и 11.

Задача 4. В спортивном центре есть секции бега, прыжков и плавания. Каждый спортсмен посещает одну или две секции.

Треть бегунов занимаются прыжками, пятая часть бегунов занимается плаванием.

Половина прыгунов занимается бегом, четверть прыгунов занимается плаванием.

Десятая часть пловцов занимается бегом. Какая доля пловцов занимается прыжками?

Ответ: $1/12$.

Решение. Пусть секцию бега посещает a человек, секцию прыжков – b человек, секцию плавания – c человек.

Количество человек, занимающихся бегом и прыжками, равно

$$\frac{1}{3}a = \frac{1}{2}b \Rightarrow b = \frac{2}{3}a.$$

Количество человек, занимающихся бегом и плаванием, равно

$$\frac{1}{5}a = \frac{1}{10}c \Rightarrow a = \frac{1}{2}c.$$

Получаем, что

$$b = \frac{2}{3}a = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}c = \frac{1}{3}c.$$

Количество человек, занимающихся плаванием и прыжками, равно

$$\frac{1}{6}b = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}c = \frac{1}{12}c.$$

Задача 5. Решите уравнение $|\log_2(64x^4)| - \log_2|32x^3| = 10$.

Ответ: $\pm 2^9$ и $\pm 2^{-3}$.

Решение. Сначала приведем уравнение к следующему виду

$$|2 + \log_2((2x)^4)| - (2 + \log_2(|2x|^3)) = 10.$$

Заметим, что $(2x)^4 = |2x|^4$. Сделаем замену $\log_2|2x| = t$. После замены уравнение принимает вид

$$|2 + 4t| - 3t = 12.$$

Если $2 + 4t \geq 0$ или при $t \geq -1/2$, то решение имеет вид $t = 10$.

При $t < -1/2$ имеем

$$-7t = 14 \quad \Rightarrow \quad t = -2.$$

После обратной замены имеем

1. $t = 10 \quad \Rightarrow \quad \log_2|2x| = 10$. Следовательно, $x = \pm 2^9$.

2. $t = -2 \quad \Rightarrow \quad \log_2|2x| = -2$. Следовательно, $x = \pm 2^{-3}$.

Задача 6. Решите уравнение

$$\cos^6 x + \sin^6 x = 6 \sin^2 2x$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2}n \pm \frac{1}{4} \arccos \frac{19}{27}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Преобразуем уравнение, используя формулы понижения степени и основное тригонометрическое тождество

$$\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^3 + \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^3 = 6(1 - \cos^2 2x).$$

Упрощая, получаем

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos^2 2x = 6 - 6 \cos^2 2x.$$

Понижая степень еще раз, имеем

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{8}(1 + \cos 4x) = 6 - 3(1 + \cos 4x)$$

или

$$\cos 4x = \frac{19}{27}.$$

Следовательно,

$$4x = 2\pi n \pm \arccos \frac{19}{27}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

или

$$x = \frac{\pi}{2}n \pm \frac{1}{4} \arccos \frac{19}{27}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Задача 7. При каких значениях параметра a многочлены

$$f(x) = x^3 + x^2 + 3ax + (2a^2 - 216), \quad g(x) = x^3 + 2x^2 + 6ax + (4a^2 - 216)$$

имеют общий корень?

Ответ: $-3, -6$.

Решение. Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ имеют общий корень тогда и только тогда, когда многочлены $f(x)$ и $g(x) - f(x)$ имеют общий корень. Вычтем и разложим на множители:

$$g(x) - f(x) = x^2 + 3ax + 2a^2 = (x + 2a)(x + a).$$

Корни многочлена $g(x) - f(x)$ равны $-2a$ и $-a$. Значит, искомые значения a – те, для которых выполнено $f(-2a) = 0$ или $f(-a) = 0$. Подставим:

$$f(-2a) = -8a^3 - 216, \quad f(-a) = -a^3 - 216.$$

Равенство $f(-2a) = 0$ выполнено при $a = -3$, равенство $f(-a) = 0$ – при $a = -6$.

Задача 8. Числа a и b – не целые. Известно, что $ab = [a][b] = -7$. Докажите, что $\{a\} \leq 8\{b\}$.

(Квадратные скобки обозначают целую часть числа, фигурные скобки обозначают дробную часть числа.)

Доказательство. Положим $x = \{a\}$, $y = \{b\}$. Нужно доказать, что $x \leq 8y$. Известно, что $x, y \in (0, 1)$.

Числа $[a]$ и $[b]$ – целые, их произведение равно -7 . Значит, есть четыре случая:

1) $a = 1, b = -7$;

2) $a = -7, b = 1$;

3) $a = -1, b = 7$;

4) $a = 7, b = -1$.

Равенство

$$([a] + x)([b] + y) = -7$$

с учетом равенства $[a][b] = -7$ можно записать как

$$[a]y + [b]x + xy = 0.$$

Рассмотрим это равенство для каждого из четырех случаев.

1) $y - 7x + xy = 0$

В этом случае $x = \frac{1}{7}y + \frac{1}{7}xy < \frac{2}{7}y < 8y$.

2) $-7y + x + xy = 0$

В этом случае $x = (7 - x)y < 7y < 8y$.

3) $-y + 7x + xy = 0$

В этом случае $x = \frac{1}{7}(y - x) < 8y$.

4) $7y - x + xy = 0$

В этом случае $x = 7y + xy < 7y + y = 8y$.

Таким образом, во всех четырех случаях выполняется неравенство $\{a\} \leq 8\{b\}$.

Задача 9. Функция $f(x)$ определена на всей вещественной оси. Известно, что функция $g(x)$, заданная равенством

$$g(x) = 5f(\operatorname{tg} x) + f(\operatorname{ctg} x)$$

ограничена. Докажите, что функция $f(x)$ тоже ограничена.

Доказательство. Пусть $|g(x)| \leq R$ для любого x .

Сделаем замену $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ и воспользуемся формулами приведения:

$$\begin{cases} 5f(\operatorname{tg} x) + f(\operatorname{ctg} x) = g(x) \\ f(\operatorname{tg} x) + 5f(\operatorname{ctg} x) = g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{cases}.$$

Найдем $f(\operatorname{tg} x)$ из системы уравнений:

$$f(\operatorname{tg} x) = \frac{5g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - g(x)}{24}.$$

Получаем, что функция $|f(\sin x)| \leq \frac{1}{4}R$ для любого x . При этом множество значений функции $f(\operatorname{tg} x)$ совпадает с множеством значений функции $f(x)$.

Задача 10. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 = (y - z)^2 - 8, \\ y^2 = (z - x)^2 - 20, \\ z^2 = (x - y)^2 + 40. \end{cases}$$

Ответ: $(1, 4, 7), (-1, -4, -7)$.

Решение. Соберем все квадраты в левых частях уравнений

$$\begin{cases} x^2 - (y - z)^2 = -8, \\ y^2 - (z - x)^2 = -20, \\ z^2 - (x - y)^2 = 40 \end{cases}$$

и воспользуемся формулой разность квадратов

$$\begin{cases} (x - y + z)(x + y - z) = -8, \\ (y - z + x)(y + z - x) = -20, \\ (z - x + y)(z + x - y) = 40. \end{cases}$$

Делая замену переменных

$$x - y + z = A, \quad x + y - z = B, \quad x - y - z = C,$$

получаем

$$AB = -8 = -2^3, \quad -BC = -20 = -5 \cdot 2^2, \quad -AC = 40 = 5 \cdot 2^3.$$

Следовательно, $(ABC)^2 = 5^2 \cdot 2^8$ и $ABC = \pm 5 \cdot 2^4 = \pm 80$.

Если $ABC = 80$, то $C = -10$, $A = 4$, $B = -2$ или

$$\begin{cases} x - y - z = -10, \\ x - y + z = 4, \\ x + y - z = -2. \end{cases}$$

Решая данную систему, получаем $x = 1$, $y = 4$, $z = 7$.

При $ABC = -80$ имеем $x = -1$, $y = -4$, $z = -7$.