

Вариант 1. Решения.

1. Найдите сумму трехзначных натуральных четных чисел, кратных числу 3.

Решение. Четные натуральные числа, кратные 3, образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = 6$. Первое такое трехзначное число равно $a_1 = 102$, последнее – $a_n = 996$.

Из формулы

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

находим количество членов прогрессии $n = 150$.

Вычисляя сумму прогрессии по формуле

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,$$

имеем $S = 82350$.

Ответ: 82350.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 8, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 30, \\ 10xy + 10zx = 7yz. \end{cases}$$

Решение. После возведения первого уравнения системы в квадрат имеем

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2zx + 2yz = 64$$

или, с учетом второго уравнения системы,

$$2xy + 2zx = 34 - 2yz.$$

Используя данное равенство для упрощения третьего уравнения системы, получаем

$$5(34 - 2yz) = 7yz$$

или

$$17yz = 170 \Rightarrow yz = 10.$$

Из уравнений

$$y + z = 8 - x \quad \text{и} \quad 10x(y + z) = 7yz = 70$$

находим x :

$$x(8 - x) = 7 \Rightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 7.$$

Из второго уравнения системы вытекает, что $x = 7$ – это посторонний корень. Следовательно, $x = 1$.

Из равенств

$$y + z = 7, \quad yz = 10$$

следует, что y и z – это корни квадратного уравнения

$$t^2 - 7t + 10 = 0 \Rightarrow y = 2, \quad z = 5 \quad \text{или} \quad y = 5, \quad z = 2.$$

Ответ: $(x; y; z) = (1; 2; 5)$ и $(x; y; z) = (1; 5; 2)$.

3. Решить неравенство

$$\frac{4 \log_{x+1}(x-1) + 2 \log_{x-1}(x+1) + 6}{4 \log_{x+1}(x-1) + \log_{x-1}(x+1) - 4} \geq 0.$$

Решение. ОДЗ: $x > 1$, $x \neq 2$. Введем обозначение

$$\log_{x+1}(x-1) = t \Rightarrow \log_{x-1}(x+1) = t^{-1}.$$

В новых обозначениях заданное неравенство будет иметь вид

$$\frac{4t + 2t^{-1} + 6}{4t + t^{-1} - 4} \geq 0 \Rightarrow \frac{4t^2 + 6t + 2}{4t^2 - 4t + 1} \geq 0 \Rightarrow \frac{2(t+1)(2t+1)}{(2t-1)^2} \geq 0.$$

Решая данное неравенство методом интервалов, получаем

$$t \leq -1; \quad -\frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2}, \quad t > \frac{1}{2}.$$

Возвращаясь к логарифмам, имеем

$$t \leq -1 \Rightarrow \log_{x+1}(x-1) \leq -1 \Rightarrow x-1 \leq \frac{1}{x+1}.$$

Здесь мы учли, что основание логарифма больше 1 ($x > 1$, $x+1 > 2$). Упрощая получившееся неравенство, имеем

$$(x-1)(x+1) \leq 1 \Rightarrow x^2 - 1 \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq 2 \Rightarrow 1 < x \leq \sqrt{2}.$$

Преобразуя остальную часть решения, имеем

$$t \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow \log_{x+1}(x-1) \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow (x-1)^2 \geq \frac{1}{x+1}.$$

Здесь мы снова учли, что основание логарифма больше 1. Упрощая получившееся неравенство, имеем

$$(x-1)^2(x+1) \geq 1 \Rightarrow x^3 - x^2 - x + 1 \geq 1 \Rightarrow x(x^2 - x - 1) \geq 0.$$

Поскольку $x > 0$, то решение данного неравенства имеет вид $x \geq (1 + \sqrt{5})/2$.

Теперь осталось учесть, что $t \neq 1/2$ или

$$\log_{x+1}(x-1) \neq \frac{1}{2} \Rightarrow (x-1)^2 \neq x+1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \neq x+1 \Rightarrow x(x-3) \neq 0.$$

Учитывая, что $x > 1$, имеем $x \neq 3$.

Подводя итоги, получаем ответ.

Ответ: $(1; \sqrt{2}]; [(1 + \sqrt{5})/2; 2); (2; 3); (3; +\infty)$.

4. Дана прямоугольная коробка $ABCD A' B' C' D'$, где

$$|AA'| = |BB'| = |CC'| = |DD'| = 2, \quad |AD| = |BC| = 1, \quad |AB| = |DC| = 3.$$

Точка H находится в середине ребра AA' . Муравей по кратчайшему пути по поверхности коробки перешел из точки C' в точку H . Найти длину пройденного им пути.

5. Найти решения уравнения

$$7 \sin 3x - 5 \sin x - 6 \cos 3x - 8 \cos x = 0.$$

Решение. Сначала выведем формулы тригонометрических функций тройного угла

$$\begin{aligned} \sin 3x &= \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x = \\ &= 2 \sin x \cos^2 x + \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \sin x (3 \cos^2 x - \sin^2 x). \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \\ &= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x = (\cos^2 x - 3 \sin^2 x) \cos x. \end{aligned}$$

Используя данные соотношения и основное тригонометрическое множество, записываем уравнение в следующем виде

$$7 \sin x (3 \cos^2 x - \sin^2 x) - 5 \sin x (\sin^2 x + \cos^2 x) - \\ - 6 (\cos^2 x - 3 \sin^2 x) \cos x - 8 \cos x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$$

или

$$\sin x (16 \cos^2 x - 12 \sin^2 x) - \cos x (14 \cos^2 x - 10 \sin^2 x) = 0.$$

Нетрудно видеть, что решения данного уравнения удовлетворяют условию $\cos x \neq 0$. Поэтому делим его на $\cos^3 x$ и получаем уравнение на $\operatorname{tg} x$

$$\operatorname{tg} x (16 - 12 \operatorname{tg}^2 x) - (14 - 10 \operatorname{tg}^2 x) = 0$$

или

$$12 \operatorname{tg}^3 x - 10 \operatorname{tg}^2 x - 16 \operatorname{tg} x + 14 = 0.$$

Поделим уравнение на 2 и сделаем замену $\operatorname{tg} x = t$

$$6t^3 - 5t^2 - 8t + 7 = 0.$$

Нетрудно видеть, что одним из корней данного уравнения является $t = 1$. Поскольку

$$\frac{6t^3 - 5t^2 - 8t + 7}{t - 1} = 6t^2 + t - 7,$$

то остальные корни кубического уравнения равны $t = 1$ и $t = -7/6$.

Вычисляя арктангенсы найденных корней, получаем ответ.

Ответ:

$$x = \pi n + \frac{\pi}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi m - \operatorname{arctg} \frac{7}{6}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

6. Имеются 5%-ный, 15%-ный и **50%-ный** растворы одного и того же вещества. В ведро налили a литров первого, b литров второго и c литров третьего раствора. В бочку налили c литров первого, a литров второго и b литров третьего раствора. Концентрация вещества в ведре оказалась в три раза выше, чем в бочке. Найдите отношение b/c .

Решение. Объемы жидкости в ведре и в бочке одинаковые $V = a + b + c$. Поэтому вещества в ведре оказалось в три раза больше, чем в бочке.

Запишем равенство:

$$3(0,05a + 0,15b + 0,5c) = 0,05c + 0,15a + 0,5b.$$

Раскроем скобки и сократим $0,15a$:

$$0,45b + 1,5c = 0,05c + 0,5b.$$

Преобразуем:

$$1,45c = 0,05b \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{1,45}{0,05} = 29.$$

Ответ: 29

7. **Изобразить на плоскости** XOY множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} \sin(x + y) \geq -\frac{1}{2}, \\ \operatorname{ctg}(x - 2y) \geq \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

8. В детском оздоровительном лагере есть коллективы пения, танцев и шахмат. Каждый отдыхающий в лагере входит в один или два коллектива. Половина певцов занимаются танцами, четверть певцов занимается шахматами. Треть танцоров занимается пением, шестая часть танцоров занимается шахматами. Десятая часть шахматистов занимается пением. Какая доля шахматистов занимается танцами?

Решение. Пусть коллектив пения посещает a человек, коллектив танцев – b человек, коллектив шахмат – c человек.

Количество человек, занимающихся пением и танцами, равно

$$\frac{1}{2}a = \frac{1}{3}b.$$

Количество человек, занимающихся пением и шахматами, равно

$$\frac{1}{4}a = \frac{1}{10}c.$$

Получаем, что

$$b = \frac{3}{2}a = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5}c = \frac{3}{5}c.$$

Количество человек, занимающихся танцами и шахматами, равно $b/6$. Это число равно $c/10$.

Ответ: $\frac{1}{10}$.

9. При каких значениях параметра k уравнение $\log_{x+1}(kx - 3) = 2$ имеет единственное решение?

Решение. ОДЗ: $x > -1$, $x \neq 0$, $kx - 3 > 0$. Исходное уравнение на ОДЗ равносильно следующему квадратному уравнению

$$kx - 3 = (x + 1)^2 \Rightarrow x^2 + (2 - k)x + 4 = 0.$$

Исходное уравнение имеет единственное решение в двух случаях: а) квадратное уравнение имеет единственное решение, принадлежащее ОДЗ; б) квадратное уравнение имеет два решения, одно из которых принадлежит ОДЗ.

Дискриминант квадратного уравнения равен

$$D = (k - 2)^2 - 16 = (k + 2)(k - 6).$$

Если $k = 6$, то $x = 2 \in \text{ОДЗ}$. Если $k = -2$, то $x = -2 \notin \text{ОДЗ}$.

Дискриминант $D > 0$ при $k > 6$ и при $k < -2$. Корни квадратного уравнения в этих случаях имеют вид

$$x_{1,2} = \frac{k - 2 \pm \sqrt{(k - 2)^2 - 16}}{2}.$$

Поскольку $\sqrt{(k - 2)^2 - 16} < |k - 2|$, то при $k > 6$ оба корня будут положительными и принадлежать ОДЗ. Если же $k < -2$, то оба корня будут отрицательными и меньший будет меньше -2 . Исходное уравнение будет иметь одно решение, когда больший корень будет больше -1 :

$$\begin{aligned} \frac{k - 2 + \sqrt{(k - 2)^2 - 16}}{2} > -1 &\Rightarrow k - 2 + \sqrt{(k - 2)^2 - 16} > -2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{(k - 2)^2 - 16} > -k > 2. \end{aligned}$$

Возводя неравенство в квадрат и упрощая, получаем

$$k^2 - 4k - 12 > k^2 \Rightarrow k < -3.$$

Ответ: $(-\infty; -3); \{6\}$.

10. Функция $f(x)$ определена при всех вещественных x , не равных $\frac{1}{5}$, и удовлетворяет условию

$$2f(x) > f\left(\frac{x}{5x-1}\right).$$

Докажите, что все значения функции $f(x)$ положительны.

Решение. Из условия следует, что

$$2f\left(\frac{x}{5x-1}\right) > f\left(\frac{\frac{x}{5x-1}}{5\frac{x}{5x-1}-1}\right) = f(x).$$

Следовательно,

$$f(x) < 2f\left(\frac{x}{5x-1}\right) < 4f(x) \quad \Rightarrow \quad 3f(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) > 0.$$

Ответ: ЧТД.

Вариант 2. Решения

1. Найдите сумму трехзначных натуральных нечетных чисел, кратных числу 3.

Решение. Нечетные натуральные числа, кратные 3, образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = 6$. Первое такое трехзначное число равно $a_1 = 105$, последнее – $a_n = 999$.

Из формулы

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

находим количество членов прогрессии $n = 150$.

Вычисляя сумму прогрессии по формуле

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,$$

имеем $S = 82800$.

Ответ: 82800.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 9, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 29, \\ 6xy + 6zx = 7yz. \end{cases}$$

Решение. После возведения первого уравнения системы в квадрат имеем

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2zx + 2yz = 81$$

или, с учетом второго уравнения системы,

$$2xy + 2zx = 52 - 2yz.$$

Используя данное равенство для упрощения третьего уравнения системы, получаем

$$3(52 - 2yz) = 7yz$$

или

$$13yz = 156 \Rightarrow yz = 12.$$

Из уравнений

$$y + z = 9 - x \quad \text{и} \quad 6x(y + z) = 7yz = 84$$

находим x :

$$x(9 - x) = 14 \Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = 7.$$

Из второго уравнения системы вытекает, что $x = 7$ – это посторонний корень. Следовательно, $x = 2$.

Из равенств

$$y + z = 7, \quad yz = 12$$

следует, что y и z – это корни квадратного уравнения

$$t^2 - 7t + 12 = 0 \Rightarrow y = 3, \quad z = 4 \quad \text{или} \quad y = 4, \quad z = 3.$$

Ответ: $(x; y; z) = (2; 3; 4)$ и $(x; y; z) = (2; 4; 3)$.

3. Решить неравенство

$$\frac{4 \log_x(x - 2) + 2 \log_{x-2} x + 6}{4 \log_x(x - 2) + \log_{x-2} x - 4} \geq 0.$$

Решение. ОДЗ: $x > 2$, $x \neq 3$. Введем обозначение

$$\log_x(x - 2) = t \Rightarrow \log_{x-2}(x) = t^{-1}.$$

В новых обозначениях заданное неравенство будет иметь вид

$$\frac{4t + 2t^{-1} + 6}{4t + t^{-1} - 4} \geq 0 \Rightarrow \frac{4t^2 + 6t + 2}{4t^2 - 4t + 1} \geq 0 \Rightarrow \frac{2(t+1)(2t+1)}{(2t-1)^2} \geq 0.$$

Решая данное неравенство методом интервалов, получаем

$$t \leq -1; \quad -\frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2}, \quad t > \frac{1}{2}.$$

Возвращаясь к логарифмам, имеем

$$t \leq -1 \Rightarrow \log_x(x-2) \leq -1 \Rightarrow x-2 \leq \frac{1}{x}.$$

Здесь мы учли, что основание логарифма больше 1 ($x > 2$). Упрощая получившееся неравенство, имеем

$$x^2 - 2x \leq 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 \leq 0 \Rightarrow (x-1)^2 \leq 2 \Rightarrow 2 < x \leq 1 + \sqrt{2}.$$

Преобразуя остальную часть решения, имеем

$$t \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow \log_x(x-2) \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow (x-2)^2 \geq \frac{1}{x}.$$

Здесь мы снова учли, что основание логарифма больше 1. Упрощая получившееся неравенство, имеем

$$(x-2)^2 x \geq 1 \Rightarrow x^3 - 4x^2 + 4x - 1 \geq 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 - 3x - 1) \geq 0.$$

Поскольку $x > 1$, то решение данного неравенства имеет вид $x \geq (3 + \sqrt{5})/2$.

Теперь осталось учесть, что $t \neq 1/2$ или

$$\log_x(x-2) \neq \frac{1}{2} \Rightarrow (x-2)^2 \neq x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 \neq 0 \Rightarrow (x-1)(x-4) \neq 0.$$

Учитывая, что $x > 2$, имеем $x \neq 4$.

Подводя итоги, получаем ответ.

Ответ: $(2; 1 + \sqrt{2}]$; $[(3 + \sqrt{5})/2; 3)$; $(3; 4)$; $(4; +\infty)$.

4. Дана прямоугольная коробка $ABCD A' B' C' D'$, где

$$|AA'| = |BB'| = |CC'| = |DD'| = 1, \quad |AD| = |BC| = 2, \quad |AB| = |DC| = 3.$$

Точка H находится в середине ребра AA' . Муравей по кратчайшему пути по поверхности коробки перешел из точки C' в точку H . Найти длину пройденного им пути.

5. Найти решения уравнения

$$2 \sin 3x + 4 \sin x - 9 \cos 3x - 15 \cos x = 0.$$

Решение. Сначала выведем формулы тригонометрических функций тройного угла

$$\begin{aligned} \sin 3x &= \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x = \\ &= 2 \sin x \cos^2 x + \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \sin x (3 \cos^2 x - \sin^2 x). \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \\ &= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x = (\cos^2 x - 3 \sin^2 x) \cos x. \end{aligned}$$

Используя данные соотношения и основное тригонометрическое множество, записываем уравнение в следующем виде

$$2 \sin x (3 \cos^2 x - \sin^2 x) + 4 \sin x (\sin^2 x + \cos^2 x) - \\ - 9 (\cos^2 x - 3 \sin^2 x) \cos x - 15 \cos x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$$

или

$$\sin x (10 \cos^2 x + 2 \sin^2 x) - \cos x (24 \cos^2 x - 12 \sin^2 x) = 0.$$

Нетрудно видеть, что решения данного уравнения удовлетворяют условию $\cos x \neq 0$. Поэтому делим его на $\cos^3 x$ и получаем уравнение на $\operatorname{tg} x$

$$\operatorname{tg} x (10 + 2 \operatorname{tg}^2 x) - (24 - 12 \operatorname{tg}^2 x) = 0$$

или

$$2 \operatorname{tg}^3 x + 12 \operatorname{tg}^2 x + 10 \operatorname{tg} x - 24 = 0.$$

Поделим уравнение на 2 и сделаем замену $\operatorname{tg} x = t$

$$t^3 + 6t^2 + 5t - 12 = 0.$$

Нетрудно видеть, что одним из корней данного уравнения является $t = 1$. Поскольку

$$\frac{t^3 + 6t^2 + 5t - 12}{t - 1} = t^2 + 7t + 12,$$

то остальные корни кубического уравнения равны $t = -3$ и $t = -4$.

Вычисляя арктангенсы найденных корней, получаем ответ.

Ответ:

$$x = \pi n + \frac{\pi}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi m - \operatorname{arctg} 3, \quad m \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi k - \operatorname{arctg} 4, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

6. Имеются 5%-ный, 20%-ный и 60%-ный растворы одного и того же вещества. В ведро налили a литров первого, b литров второго и c литров третьего раствора. В бочку налили c литров первого, a литров второго и b литров третьего раствора. Концентрация вещества в ведре оказалась в три раза выше, чем в бочке. Найдите отношение a/c .

Решение. Объемы жидкости в ведре и в бочке одинаковые $V = a + b + c$. Поэтому вещества в ведре оказалось в три раза больше, чем в бочке.

Запишем равенство:

$$3(0,05a + 0,2b + 0,6c) = 0,05c + 0,2a + 0,6b.$$

Раскроем скобки и сократим $0,6b$:

$$0,15a + 1,8c = 0,05c + 0,2a.$$

Преобразуем:

$$1,75c = 0,05a \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{1,75}{0,05} = 35.$$

Ответ: 35

7. Изобразить на плоскости XOY множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} \sin(2x - y) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \operatorname{tg}(x + y) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

8. В спортивном центре есть секции бега, прыжков и плавания. Каждый спортсмен посещает одну или две секции. Треть бегунов занимаются прыжками, пятая часть бегунов занимается плаванием. Половина прыгунов занимается бегом, четверть прыгунов занимается плаванием. Десятая часть пловцов занимается бегом. Какая доля пловцов занимается прыжками?

Решение. Пусть секцию бега посещает a человек, секцию прыжков — b человек, секцию плавания — c человек.

Количество человек, занимающихся бегом и прыжками, равно

$$\frac{1}{3}a = \frac{1}{2}b.$$

Количество человек, занимающихся бегом и плаванием, равно

$$\frac{1}{5}a = \frac{1}{10}c.$$

Получаем, что

$$b = \frac{2}{3}a = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}c = \frac{1}{3}c.$$

Количество человек, занимающихся прыжками и плаванием, равно $b/4$. Это число равно $c/12$.

Ответ: $\frac{1}{12}c$

9. При каких значениях параметра a , уравнение $\lg(x+3) = 0,5 \lg(ax+9)$ имеет единственный корень?
10. Функция $f(x)$ определена при всех вещественных x , не равных $\frac{1}{7}$, и удовлетворяет условию

$$3f(x) < f\left(\frac{x}{7x-1}\right).$$

Докажите, что все значения функции $f(x)$ отрицательны.

Решение. Из условия следует, что

$$3f\left(\frac{x}{7x-1}\right) < f\left(\frac{\frac{x}{7x-1}}{7\frac{x}{7x-1}-1}\right) = f(x).$$

Следовательно,

$$f(x) > 3f\left(\frac{x}{7x-1}\right) > 9f(x) \Rightarrow 8f(x) < 0 \Rightarrow f(x) < 0.$$

Ответ: ЧТД.