

ВАРИАНТ 2
АЭРОКОСМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

Заместитель председателя Оргкомитета

В.А. Матьяш

1. Найдите сумму трехзначных натуральных нечетных чисел, кратных числу 3.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 9, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 29, \\ 6xy + 6zx = 7yz. \end{cases}$$

3. Решить неравенство

$$\frac{4 \log_x(x-2) + 2 \log_{x-2} x + 6}{4 \log_x(x-2) + \log_{x-2} x - 4} \geq 0.$$

4. Дана прямоугольная коробка $ABCD A' B' C' D'$, где

$$|AA'| = |BB'| = |CC'| = |DD'| = 1, \quad |AD| = |BC| = 2, \quad |AB| = |DC| = 3.$$

Точка H находится в середине ребра AA' . Муравей по кратчайшему пути по поверхности коробки перешел из точки C' в точку H . Найти длину пройденного им пути.

5. Найти решения уравнения

$$2 \sin 3x + 4 \sin x - 9 \cos 3x - 15 \cos x = 0.$$

6. Имеются 5%-ный, 20%-ный и 60%-ный растворы одного и того же вещества. В ведро налили a литров первого, b литров второго и c литров третьего раствора. В бочку налили c литров первого, a литров второго и b литров третьего раствора. Концентрация вещества в ведре оказалась в три раза выше, чем в бочке. Найдите отношение a/c .

7. Изобразить на плоскости XOY множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} \sin(2x - y) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \operatorname{tg}(x + y) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

8. В спортивном центре есть секции бега, прыжков и плавания. Каждый спортсмен посещает одну или две секции. Треть бегунов занимаются прыжками, пятая часть бегунов занимается плаванием. Половина прыгунов занимается бегом, четверть прыгунов занимается плаванием. Десятая часть пловцов занимается бегом. Какая доля пловцов занимается прыжками?

9. При каких значениях параметра a , уравнение $\lg(x+3) = 0,5 \lg(ax+9)$ имеет единственный корень?

10. Функция $f(x)$ определена при всех вещественных x , не равных $\frac{1}{7}$, и удовлетворяет условию

$$3f(x) < f\left(\frac{x}{7x-1}\right).$$

Докажите, что все значения функции $f(x)$ отрицательны.

Ответственный секретарь Оргкомитета

А.К. Малышев

2024 г.

**ГУАП**Государственный университет
аэрокосмического приборостроенияШифр 6034**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ**Олимпиада школьников по МатематикеВариант № 2

№ задания	1		2		3		4		5		
ответ	82800 $\oplus$		$(2;3;4)$ $(2;4;3)$ $\oplus$		$\pm$		$\sqrt{16,25}$ $\pm$				
№ задания	6		7		8		9		10		
ответ	0 $\oplus$				$\frac{1}{12}$ $\oplus$		при $a=6$ $\pm$				
№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Итого
балл	5	5	3	3	—	1	—	5	3	—	25

Задача.

1) найти произведение парных 3m:

от 105 до 999

арифметическая прогрессия

105; 111; 117; ...; 993; 999 $\Rightarrow d=6$

$$999 - 105 = 894$$

$$894 : 6 = 149$$

$$149 + 1 = 150 \Rightarrow \text{число прогрессии } 150$$

$$\text{тогда } n_1 = 105$$

найти сумму сумм

$$\frac{(2n_1 + 149d) \cdot N}{2} = (2 \cdot 105 + 149 \cdot 6) \cdot 75 = 1104 \cdot 75 = 82800$$

Ответ: 82800

$$\begin{aligned} \text{2) } \begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=20 \\ 6xy+6xz-7yz \end{cases} & \begin{cases} x=0-y-z \\ (0-y-z)^2+y^2+z^2=20 \\ 6(0-y-z)(y+z)-7yz \end{cases} & \begin{cases} x=0-y-z \\ 2y^2+2z^2+2yz-10y-10z=-52 \\ -6y^2-6z^2-10yz+54y+54z=0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$2y^2+2z^2+2yz-10y-10z=-52 \quad | \cdot 3$$

$$6y^2+6z^2+6yz-54y-54z=-156$$

$$\begin{cases} 6y^2+6z^2+6yz-54y-54z=-156 \\ -6y^2-6z^2-10yz+54y+54z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -13yz=-156 \\ yz=12 \end{cases} \Rightarrow y=\frac{12}{z}$$

$$x = \frac{xy+z}{6(y+z)} \quad ; \quad x=0-y-z \quad ; \quad y+z = \frac{12}{z} + z = \frac{12+z^2}{z}$$

$$\frac{84}{6 \left(\frac{12+z^2}{z} \right)} = 0 - \left(\frac{12+z^2}{z} \right) \quad ; \quad \text{вынес } \left(\frac{12+z^2}{z} \right) = t$$

$$\frac{14}{t} = 0 - t \Rightarrow t_1 = 7 \quad t_2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{12+z^2}{z} = 7 \\ \frac{12+z^2}{z} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2-7z+12=0 \\ z^2-2z+12=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1=4 \\ z_2=3 \end{cases} \quad D < 0 \Rightarrow \text{нет}$$

$$\Rightarrow y_1=3 \quad y_2=4$$

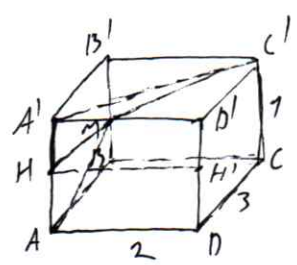
$$x_1=0-7=-7$$

$$x_2=0-7=-7$$

Ответ: $(x_1, y_1, z_1) = (-7, 3, 4)$

$(x_2, y_2, z_2) = (-7, 4, 3)$

14)

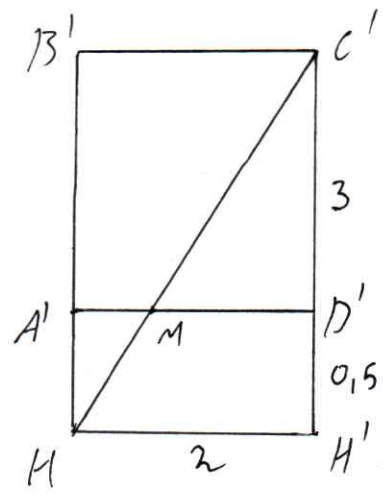


$$|AA'| = |BB'| = |CC'| = |DD'| = 1$$

$$|AD| = |BC| = 2$$

$$|AB| = |DC| = 3$$

Самым коротким путем от точки M до точки C' является путь M-A'-D'-C'.



$$\frac{D'M}{M A'} = \frac{C'D'}{C'H'} \Rightarrow \frac{D'M}{2} = \frac{3}{3.5}$$

$$3.5 D'M = 6$$

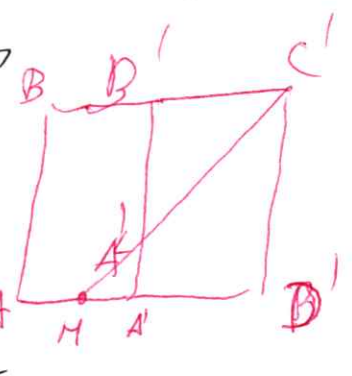
$$D'M = \frac{6}{3.5}$$

$$a \quad C'H = \sqrt{H H'^2 + C H'^2} = \sqrt{4 + 3.5^2}$$

$$\sqrt{4 + 12.25} = \sqrt{16.25}$$

по теореме Пифагора

Ответ: $\sqrt{16.25}$



$$n3) \frac{4 \log_x (x-2) + 2 \log_x x - 2^x + 6}{4 \log_x (x-2) + \log_x x - 4} \geq 0$$

$$\begin{aligned} x &\neq 1 \\ x &> 0 \\ x-2 &> 0 \\ x-2 &\neq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &\neq 1 \\ x &\neq 2 \\ x &> 2 \end{aligned}$$

(+)

$$\frac{4 \log_x (x-2) + \frac{2}{\log_x (x-2)} + 6}{4 \log_x (x-2) + \frac{1}{\log_x (x-2)} - 4} \geq 0$$

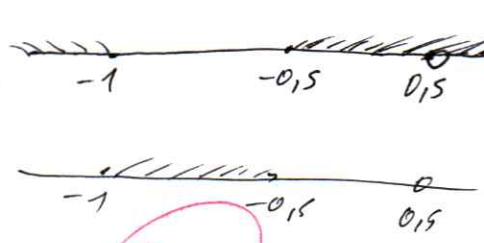
$$C'H = \sqrt{(C'D')^2 + (D'H)^2} = \sqrt{9 + (2.5)^2} = \sqrt{15.25}$$

$$\frac{4(\log_x (x-2))^2 + 2 + 6 \log_x (x-2)}{4(\log_x (x-2))^2 + 1 - 4 \log_x (x-2)} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4(\log_x (x-2))^2 + 2 + 6 \log_x (x-2) \geq 0 \\ 4(\log_x (x-2))^2 + 1 - 4 \log_x (x-2) > 0 \\ 4(\log_x (x-2))^2 + 2 + 6 \log_x (x-2) \leq 0 \\ 4(\log_x (x-2))^2 + 1 - 4 \log_x (x-2) < 0 \end{cases}$$

пусть $\log_x (x-2) = t$

$$\begin{cases} 4t^2 + 6t + 2 \geq 0 \\ 4t^2 + 1 - 4t > 0 \\ 4t^2 + 6t + 2 \leq 0 \\ 4t^2 + 1 - 4t < 0 \end{cases}$$



$$\{t \in (-\infty; -1] \cup [0.5; +\infty) \setminus \{0.53\}\}$$

$$\{t \in [-1; -0.5]\}$$

(+)

