

ВАРИАНТ 1
АЭРОКОСМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

Заместитель председателя Оргкомитета

В.А. Матьяш

1. Найдите сумму трехзначных натуральных четных чисел, кратных числу 3.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 8, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 30, \\ 10xy + 10zx = 7yz. \end{cases}$$

3. Решить неравенство

$$\frac{4 \log_{x+1}(x-1) + 2 \log_{x-1}(x+1) + 6}{4 \log_{x+1}(x-1) + \log_{x-1}(x+1) - 4} \geq 0.$$

4. Дана прямоугольная коробка $ABCD A' B' C' D'$, где

$$|AA'| = |BB'| = |CC'| = |DD'| = 2, \quad |AD| = |BC| = 1, \quad |AB| = |DC| = 3.$$

Точка H находится в середине ребра AA' . Муравей по кратчайшему пути по поверхности коробки перешел из точки C' в точку H . Найти длину пройденного им пути.

5. Найти решения уравнения

$$7 \sin 3x - 5 \sin x - 6 \cos 3x - 8 \cos x = 0.$$

6. Имеются 5%-ный, 15%-ный и 50%-ный растворы одного и того же вещества. В ведро налили a литров первого, b литров второго и c литров третьего раствора. В бочку налили c литров первого, a литров второго и b литров третьего раствора. Концентрация вещества в ведре оказалась в три раза выше, чем в бочке. Найдите отношение b/c .

7. Изобразить на плоскости XOY множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} \sin(x+y) \geq -\frac{1}{2}, \\ \operatorname{ctg}(x-2y) \geq \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

8. В детском оздоровительном лагере есть коллективы пения, танцев и шахмат. Каждый отдыхающий в лагере входит в один или два коллектива. Половина певцов занимаются танцами, четверть певцов занимается шахматами. Треть танцоров занимается пением, шестая часть танцоров занимается шахматами. Десятая часть шахматистов занимается пением. Какая доля шахматистов занимается танцами?

9. При каких значениях параметра k уравнение $\log_{x+1}(kx-3) = 2$ имеет единственное решение?

10. Функция $f(x)$ определена при всех вещественных x , не равных $\frac{1}{5}$, и удовлетворяет условию

$$2f(x) > f\left(\frac{x}{5x-1}\right).$$

Докажите, что все значения функции $f(x)$ положительны.

Ответственный секретарь Оргкомитета

А.К. Малышев

**ГУАП**Государственный университет
аэрокосмического приборостроенияШифр 6056

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ**

Олимпиада школьников по МАТЕМАТИКЕВариант № 1

№ задания	1		2		3		4		5		
ответ	82350 +		(1; 5; 2); (4; 2; 5) ±		±		√13 +		—		
№ задания	6		7		8		9		10		
ответ	—		+		1 10 +		—		—		
№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Итого
балл	5	3	3	5	0	0	5	5	0	0	26

1

Если число чётно, оно кратно двум; ~~делится на 3~~ кратно 3. То есть подходящие числа образуют арифметическую прогрессию с шагом 6. Первый член - первое трёхзначное число, делящееся на 6 - 102, последний - 888.

По формуле n-член $102 + 6(n-1) = 888$

$$6(n-1) = 786$$

$$n-1 = 131$$

$$n = 132$$

Получаем, что подходящих чисел

132

По формуле суммы n членов прогрессии $S = \frac{102 + 888}{2} \cdot 132$

$$S = \frac{990}{2} \cdot 132 = 540 \cdot 132 =$$

2

$$\begin{cases} x+y+z=8 \\ x^2+y^2+z^2=30 \\ 10xy+10yz=7xz \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=64 \\ x^2+y^2+z^2=30 \\ 10xy+10yz=7xz \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=64 \\ x^2+y^2+z^2=30 \\ 10xy+10yz=7xz \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=64 \\ x^2+y^2+z^2=30 \\ 10xy+10yz=7xz \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=64 \\ x^2+y^2+z^2=30 \\ 10xy+10yz=7xz \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=64 \\ x^2+y^2+z^2=30 \\ 10xy+10yz=7xz \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=64 \\ x^2+y^2+z^2=30 \\ 10xy+10yz=7xz \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=64 \\ x^2+y^2+z^2=30 \\ 10xy+10yz=7xz \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=64 \\ x^2+y^2+z^2=30 \\ 10xy+10yz=7xz \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=64 \\ x^2+y^2+z^2=30 \\ 10xy+10yz=7xz \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=64 \\ x^2+y^2+z^2=30 \\ 10xy+10yz=7xz \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=64 \\ x^2+y^2+z^2=30 \\ 10xy+10yz=7xz \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=64 \\ x^2+y^2+z^2=30 \\ 10xy+10yz=7xz \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=64 \\ x^2+y^2+z^2=30 \\ 10xy+10yz=7xz \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=64 \\ x^2+y^2+z^2=30 \\ 10xy+10yz=7xz \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=64 \\ x^2+y^2+z^2=30 \\ 10xy+10yz=7xz \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=64 \\ x^2+y^2+z^2=30 \\ 10xy+10yz=7xz \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=64 \\ x^2+y^2+z^2=30 \\ 10xy+10yz=7xz \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=64 \\ x^2+y^2+z^2=30 \\ 10xy+10yz=7xz \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=64 \\ x^2+y^2+z^2=30 \\ 10xy+10yz=7xz \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=64 \\ x^2+y^2+z^2=30 \\ 10xy+10yz=7xz \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=64 \\ x^2+y^2+z^2=30 \\ 10xy+10yz=7xz \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=64 \\ x^2+y^2+z^2=30 \\ 10xy+10yz=7xz \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=64 \\ x^2+y^2+z^2=30 \\ 10xy+10yz=7xz \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=64 \\ x^2+y^2+z^2=30 \\ 10xy+10yz=7xz \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=64 \\ x^2+y^2+z^2=30 \\ 10xy+10yz=7xz \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=64 \\ x^2+y^2+z^2=30 \\ 10xy+10yz=7xz \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=64 \\ x^2+y^2+z^2=30 \\ 10xy+10yz=7xz \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=64 \\ x^2+y^2+z^2=30 \\ 10xy+10yz=7xz \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=64 \\ x^2+y^2+z^2=30 \\ 10xy+10yz=7xz \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=64 \\ x^2+y^2+z^2=30 \\ 10xy+10yz=7xz \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=64 \\ x^2+y^2+z^2=30 \\ 10xy+10yz=7xz \end{cases}$$

$$= 82350$$

Т.к. $x+y+z=8$, то

x, y, z рациональны,

усл. $x^2+y^2+z^2=30$ при подстановке

говорит, что x, y, z неотрицательны.

При таких ограничениях удобно припускать

такие x, y, z $\begin{cases} y \cdot z = 20 \\ x+y+z=8 \end{cases}$

$$\begin{cases} y \cdot z = 20 \\ x+y+z=8 \end{cases}$$

$$y=2 \quad z=5 \quad x=1; \quad y=5 \quad z=2 \quad x=1$$

При подстановке системы верна

$$10; 5; 2, 18$$

10 и 1 - много для усл (1), зн. $y, z \in \{5, 2\}$

x и y усл (1)

не подходит, что

не подходит, что

Ответ: $(1; 2; 5) \cdot (1; 5; 2)$

3

$$\frac{4 \log_{x+1} (x-1) + 2 \log_{x-1} (x+1) + 6}{4 \log_{x+1} (x-1) + \log_{x-1} (x+1) - 4} \geq 0$$

$$* \begin{cases} x-1 > 0 \\ x+1 > 0 \\ x-1 \neq 1 \\ x+1 \neq 1 \end{cases}$$

Сделаем замену: $x+1 = P$, $t = x-1$,

$$\begin{matrix} P > 0 & t > 0 \\ P \neq 1 & t \neq 1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ x > -1 \\ x \neq 2 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{4 \log_P t + 2 \log_t P + 6}{4 \log_P t + \log_t P - 4} \geq 0$$

$$4 \log_P t + \log_t P - 4$$

$$\frac{4}{\log_t P} + 2 \log_t P + 6 \geq 0$$

$$\frac{4}{\log_t P} + \log_t P + 4$$

$$\frac{\frac{4}{\log_t P} + 2 \log_t^2 P + 6 \log_t P}{\log_t P} \geq 0$$

$$\frac{4 + 2 \log_t^2 P + 6 \log_t P}{4 + \log_t^2 P + 4 \log_t P} \geq 0$$

$$2 \frac{(\log_t P + 2)(\log_t P + 1)}{(\log_t P - 2)^2} \geq 0$$

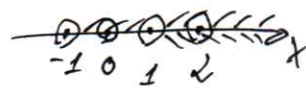
$$2 \frac{(\log_{x-1} x+1 + \log_{x-1} (x-1)^2) \cdot (\log_{x-1} x+1 + \log_{x-1} x+1)}{(\log_{x-1} x+1 - \log_{x-1} (x-1)^2)^2} \geq 0$$

Метод разложения:

$$2 \frac{(x-1)((x+1)(x-1)^2 - 1) \cdot (x-1)((x+1)(x-1) - 1)}{((x-1)(x+1 - (x-1)^2))^2} \geq 0$$

$$2 \frac{(x-1)^2 ((x+1)(x-1)^2 - 1)((x+1)(x-1) - 1)}{(x-1)^2 x^2 (3-x)^2} \geq 0$$

(+)

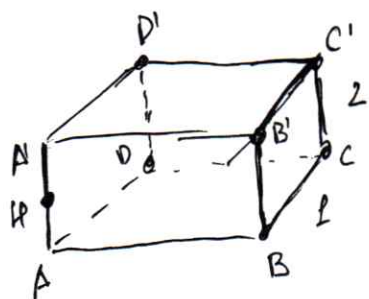


$$1 < x < 2 \quad 2 < x$$

$$(1; 2) \cup (2; +\infty)$$



4

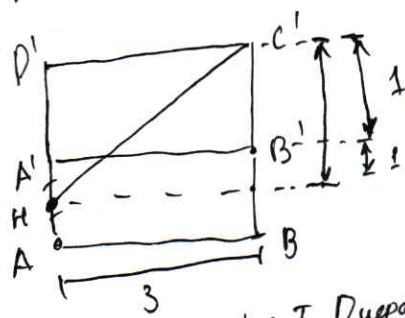


Кратчайший маршрут пройдет по двум смежным граням

например $AB'B'D'$ и $AA'B'B$ или $AA'D'D$ аналогичные

Рассмотрим пути

1)



по Т. Пифагора

$$C'H = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

2) через грань ABCD очевидно больше

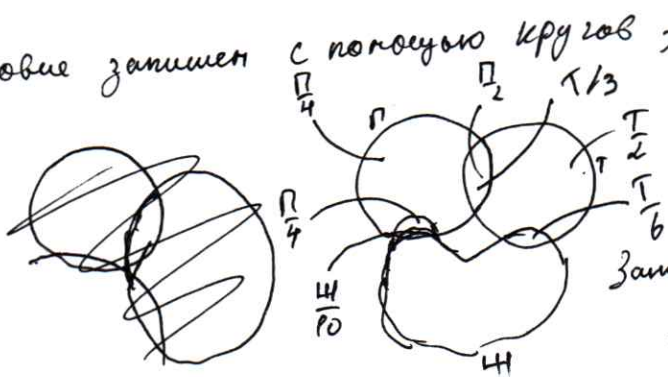
3) $C'A' \rightarrow A'H$
 $\sqrt{10}$ 1 $\sqrt{10+1} = \sqrt{11}$
 Невыгодно

4) $C'D' \rightarrow D'A' \rightarrow A'H$ -
 $3+1+1=5$

$$\sqrt{25} > \sqrt{13} \text{ нет}$$

8

Условие запишем с помощью кругов Эйлера



$$\tau - \frac{\tau}{3} - \frac{\tau}{6} = \tau - \frac{\tau}{6} - \frac{\tau}{6} = \tau - \frac{2\tau}{6} = \frac{\tau}{2}$$

$$\tau - \frac{\tau}{4} - \frac{\tau}{2} = \frac{\tau}{4}$$

пишет и так далее

Записываются максималы и минималы

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\chi}{10}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\tau}{3}$$

$$\pi = \frac{4\chi}{10}$$

$$\frac{2\chi}{10} = \frac{\tau}{3}$$

$$\tau = \frac{6\chi}{10}$$

Максимальная записывается минимал частью тангентов

$$\frac{\tau}{6} = \frac{6\chi}{10 \cdot 6} = \frac{\chi}{10}, \text{ т.е. данная часть максимизируется}$$

записывается тангенсом

Ответ: $\frac{1}{10}$ (+)

7

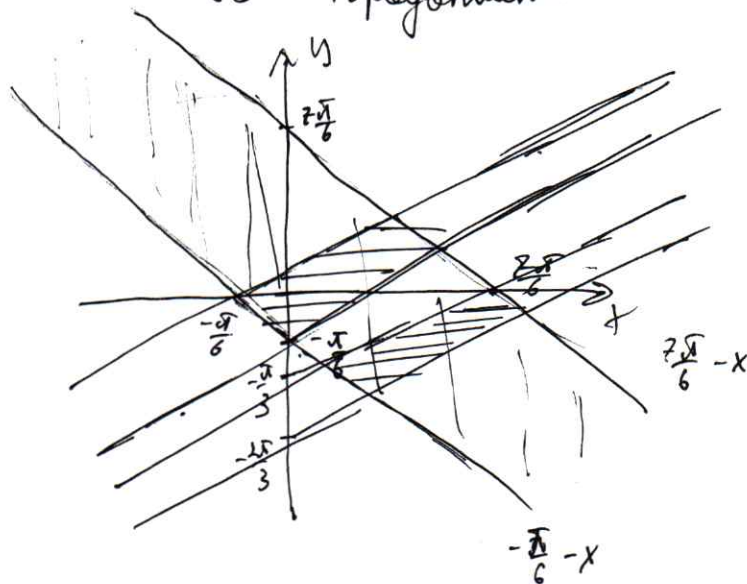
$$\begin{cases} \sin(x+y) \geq -\frac{1}{2} \\ \sin(x-2y) \geq \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

(1) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq x+y \leq \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

(2) $\pi k - \frac{\pi}{3} \leq x-2y \leq \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ если $x-2y < \pi + \pi k$

(3) $\pi k + \frac{\pi}{3} \leq x-2y \leq \frac{4\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ если $x-2y > \pi + \pi k$

⑦ Прямые



(1) (2)

$$(2) \begin{cases} -\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{6} + \frac{x}{2} \\ -\frac{2\pi}{3} + \frac{x}{2} \leq y \leq -\frac{\pi}{3} + \frac{x}{2} \end{cases}$$

⊕