

ВАРИАНТ 2  
АЭРОКОСМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ  
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

Ректор

Ю.А. Антохина

1. Найдите количество натуральных чисел  $n$ , не превосходящих 1000, для которых выполнено  $\text{НОД}(n, 105) = 35$ .
2. При каких  $n$  можно разбить  $n$ -угольник непересекающимися диагоналями на 6-угольники и 7-угольники так, чтобы количество 6-угольников было в 2 раза меньше количества 7-угольников?
3. В фирме работает 100 человек с одинаковой производительностью труда. Требуется создать коллектив для работы над срочным проектом. Известно, что если в коллективе работает  $k$  человек, то каждый из них каждый час прерывает работу на  $3(k-1)$  минут, чтобы обсудить с коллегами план действий. При каком количестве человек в коллективе проект будет выполнен в кратчайшие сроки? Найдите все возможные ответы.
4. В спортивном центре есть секции бега, прыжков и плавания. Каждый спортсмен посещает одну или две секции.  
Треть бегунов занимаются прыжками, пятая часть бегунов занимается плаванием.  
Половина прыгунов занимается бегом, четверть прыгунов занимается плаванием.  
Десятая часть пловцов занимается бегом. Какая доля пловцов занимается прыжками?

5. **Задача 5.** Решите уравнение  $|\log_2(64x^4)| - \log_2|32x^3| = 10$ .

6. Решите уравнение

$$\cos^6 x + \sin^6 x = 6 \sin^2 2x$$

7. При каких значениях параметра  $a$  многочлены

$$f(x) = x^3 + x^2 + 3ax + (2a^2 - 216), \quad g(x) = x^3 + 2x^2 + 6ax + (4a^2 - 216)$$

имеют общий корень?

8. Числа  $a$  и  $b$  – не целые. Известно, что  $ab = [a][b] = -7$ . Докажите, что  $\{a\} \leq 8\{b\}$ .  
(Квадратные скобки обозначают целую часть числа, фигурные скобки обозначают дробную часть числа.)

9. Функция  $f(x)$  определена на всей вещественной оси. Известно, что функция  $g(x)$ , заданная равенством

$$g(x) = 5f(\operatorname{tg} x) + f(\operatorname{ctg} x)$$

ограничена. Докажите, что функция  $f(x)$  тоже ограничена.

10. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 = (y-z)^2 - 8, \\ y^2 = (z-x)^2 - 20, \\ z^2 = (x-y)^2 + 40. \end{cases}$$

Ответственный секретарь оргкомитета

2025 г.

А.К. Малышев