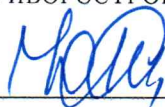


ВАРИАНТ 1
АЭРОКОСМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

Ректор



Ю.А. Антохина

1. Найдите количество натуральных чисел n , не превосходящих 1000, для которых выполнено $\text{НОД}(n, 65) = 13$.
2. При каких n можно разбить n -угольник непересекающимися диагоналями на 5-угольники и 9-угольники так, чтобы количество 5-угольников было в 3 раза больше количества 9-угольников?
3. В фирме работает 150 человек с одинаковой производительностью труда. Требуется создать коллектив для работы над срочным проектом. Известно, что если в коллективе работает k человек, то каждый из них каждый час прерывает работу на $2(k-1)$ минут, чтобы обсудить с коллегами план действий. При каком количестве человек в коллективе проект будет выполнен в кратчайшие сроки? Найдите все возможные ответы.
4. В языковом клубе есть группы английского, французского и испанского. Каждый член клуба входит в одну или две группы.
Половина изучающих английским занимаются дополнительно французским. Четверть изучающих английским занимается испанским.
Треть изучающих французский занимается английским. Шестая изучающих французский занимается испанским.
Десятая часть изучающих испанский занимается английским. Какая доля изучающих испанский занимается французским?

5. Решите уравнение $|\log_3(243x^4)| - \log_3 |81x^3| = 12$.

6. Решите уравнение

$$\cos^6 x + \sin^6 x = 4 \sin^2 2x$$

7. При каких значениях параметра a многочлены

$$f(x) = x^3 + x^2 - ax - (2a^2 + 64), \quad g(x) = x^3 + 2x^2 - 2ax - (4a^2 + 64)$$

имеют общий корень?

8. Числа a и b – не целые. Известно, что $ab = [a][b] = -5$. Докажите, что $\{a\} \leq 6\{b\}$.
(Квадратные скобки обозначают целую часть числа, фигурные скобки обозначают дробную часть числа.)
9. Функция $f(x)$ определена на интервале $(-1; 1)$. Известно, что функция $g(x)$, заданная равенством

$$g(x) = 2f(\sin x) + 3f(\cos x)$$

ограничена.

Докажите, что функция $f(x)$ тоже ограничена.

10. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 = (y-z)^2 - 8, \\ y^2 = (z-x)^2 - 16, \\ z^2 = (x-y)^2 + 32. \end{cases}$$

Ответственный секретарь оргкомитета



А.К. Малышев

2025 г.