

ВАРИАНТ 2
АЭРОКОСМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИBORОСТРОЕНИЯ

Ректор

Ю.А. Антохина

1. Найдите количество натуральных чисел n , не превосходящих 1000, для которых выполнено $\text{НОД}(n, 105) = 35$.
2. При каких n можно разбить n -угольник непересекающимися диагоналями на 6-угольники и 7-угольники так, чтобы количество 6-угольников было в 2 раза меньше количества 7-угольников?
3. В фирме работает 100 человек с одинаковой производительностью труда. Требуется создать коллектив для работы над срочным проектом. Известно, что если в коллективе работает k человек, то каждый из них каждый час прерывает работу на $3(k-1)$ минут, чтобы обсудить с коллегами план действий. При каком количестве человек в коллективе проект будет выполнен в кратчайшие сроки? Найдите все возможные ответы.
4. В спортивном центре есть секции бега, прыжков и плавания. Каждый спортсмен посещает одну или две секции.
Треть бегунов занимаются прыжками, пятая часть бегунов занимается плаванием.
Половина прыгунов занимается бегом, четверть прыгунов занимается плаванием.
Десятая часть пловцов занимается бегом. Какая доля пловцов занимается прыжками?

5. **Задача 5.** Решите уравнение $|\log_2(64x^4)| - \log_2|32x^3| = 10$.

6. Решите уравнение

$$\cos^6 x + \sin^6 x = 6 \sin^2 2x$$

7. При каких значениях параметра a многочлены

$$f(x) = x^3 + x^2 + 3ax + (2a^2 - 216), \quad g(x) = x^3 + 2x^2 + 6ax + (4a^2 - 216)$$

имеют общий корень?

8. Числа a и b – не целые. Известно, что $ab = [a][b] = -7$. Докажите, что $\{a\} \leq 8\{b\}$.
(Квадратные скобки обозначают целую часть числа, фигурные скобки обозначают дробную часть числа.)

9. Функция $f(x)$ определена на всей вещественной оси. Известно, что функция $g(x)$, заданная равенством

$$g(x) = 5f(\operatorname{tg} x) + f(\operatorname{ctg} x)$$

ограничена. Докажите, что функция $f(x)$ тоже ограничена.

10. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 = (y-z)^2 - 8, \\ y^2 = (z-x)^2 - 20, \\ z^2 = (x-y)^2 + 40. \end{cases}$$

Ответственный секретарь оргкомитета

А.К. Малышев

2025 г.

**ГУАП**Государственный университет
аэрокосмического приборостроенияШифр 0045

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ**

Олимпиада школьников по МАТЕМАТИКЕВариант № 2

№ задания	1		2		3		4		5		
ответ	19		$\begin{cases} n:2 \\ n \geq 16 \end{cases}$				$\frac{1}{12}$		$\frac{5}{12}$ $x = -512$ $\frac{0}{12}$ $x = -0,125$ $\frac{5}{12}$ $x = 0,125$ $x = 512$		
№ задания	6		7		8		9		10		
ответ			0						$\pi(-1; -4; -4)$ $(4,6; 7,6; -4)$		
№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Итого
балл	5	1	-	5	5	-	1	-	-	5	22

N1 $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, найдем чтобы НОД был 35 $n \div 3$ (тогда $\text{НОД}(n; 105) = 105$) и $n \nmid 35$

т.е. $n = 35 \cdot k$, где $k \nmid 3$ и $k \leq 28$ (т.к. иначе n будет > 1000)

т.е. $k = \{1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11; 13; 14; 16; 17; 19; 20; 22; 23; 25; 26; 28\}$

сл-но, суц. 19 таких n , для которых выполняется $\text{НОД}(n; 105) = 35$.
 Ответ: 19

N2 Если считать диагоналями, выходящими из одной вершины пересекающимися, то данную задачу можно решить следующим способом.

пусть кол-во n -угольников (далее n -уг.) = x , тогда кол-во n -угольников (далее n -уг.) = $2x$ при этом $x \in \mathbb{N}$. Всего получается $3x$ фигур в n -угольнике (далее n -уг.)

1 диагональ делит n -уг. на 2 части, т.е. 2 вершины считаются 2 раза

2 диагонали делят n -уг. на 3 части, т.е. 4 вершины считаются 2 раза и т.д., в общем виде кол-во диагоналей можно записать так: $3x - 1$ для деления n -уг. на $3x$ частей

значит, кол-во вершин, которые будут посчитаны дважды = $(3x - 1) \cdot 2$

значит, кол-во вершин n -уг. = $6x + 4 \cdot 2x - 2(3x - 1) = 6x + 14x - 6x + 2 = 14x + 2$, тогда $n \div 2$ (т.к. $14x \div 2$ и $2 \div 2$) и $n \nmid 16$ (т.к. $14 \cdot 1 + 2 = 16$) Ответ: $\begin{cases} n \div 2 \\ n \nmid 16 \end{cases}$

N4 Пусть b - ^{в70}детуны (кол-во), r - ^{р70}прыжки (кол-во), p - ^{р70}плавунцы (кол-во)
 $\frac{1}{3}b$ - ^{в70}заносится в ^{число} r , а $\frac{1}{2}r$ - ^{в70}входит в ^{число} b , т.е. они могут занимать $\frac{1}{3}$ или $\frac{1}{2}$ секциях $\frac{1}{3}b = \frac{1}{2}r$, т.е. $2b = 3r$ (1)
 аналогично $\frac{1}{5}b$ - ^{в70}заносится в ^{число} p , а $\frac{1}{10}p$ - ^{в70}входит в ^{число} b , значит, $\frac{1}{5}b = \frac{1}{10}p$, т.е. $2b = p$ (2)

из (1) и (2) соотношения получим $3r = p$ (3)

пусть x - искомая часть плавцов, тогда $x \cdot p$ - ^{в70}входит в ^{число} r , а $\frac{1}{4}r$ - ^{в70}входит в ^{число} p , т.е. $x \cdot p = \frac{1}{4}r$ (4)

из (3) и (4) соотношения получим $x \cdot 3r = \frac{1}{4}r$, т.е. $x = \frac{1}{12}$, значит $\frac{1}{12}$ плавцов заносится прыжками

Ответ: $\frac{1}{12}$

N5 $|\log_2(64x^4)| - \log_2|32x^3| = 10$

$|\log_2 64 + \log_2 x^4| - \log_2 32 - \log_2 |x^3| = 10$

$|6 + 4\log_2 |x|| - \log_2 32 - 3\log_2 |x| = 10$

$6 + 4\log_2 |x| - 5 - 3\log_2 |x| = 10$ или $-6 - 4\log_2 |x| - 5 - 3\log_2 |x| = 10$

$\log_2 |x| = 9$

$x = \pm 512$

$-7\log_2 |x| = 21$

$\log_2 |x| = -3$

$x = \pm \frac{1}{8}$

Ответ: $\pm 0,125; \pm 512$

N7 $x^3 + x^2 + 3ax + (2a^2 - 216) = x^3 + 2x^2 + 6ax + (4a^2 - 216)$

$2x^2 + 6ax + 4a^2 - 216 - x^2 - 3ax - 2a^2 + 216 = 0$

$x^2 + 3ax + 2a^2 = 0$

$D = 9a^2 - 4 \cdot 2a^2 = a^2$

если имеем 1 общий корень, то $D = 0$, т.е. $a^2 = 0$; сл-но $a = 0$

Ответ: 0

ОДЗ: $x + y - 2 \neq 0$

N10
$$\begin{cases} x^2 = (y-2)^2 - 8 \\ y^2 = (2-x)^2 - 20 \\ z^2 = (x-y)^2 + 40 \\ x^2 - (y-2)^2 = -8 \\ y^2 - (2-x)^2 = -20 \\ z^2 - (x-y)^2 = 40 \end{cases}$$

1) с.н. на с.н. месте

$$\begin{cases} (x-y+2)(x+y-2) = -8 \\ (y-z+x)(y+z-x) = -20 \\ (z-x+y)(z+x-y) = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y+2 = -\frac{8}{x+y-2} \\ y+z-x = -\frac{20}{x+y-2} \\ -\frac{8}{x+y-2} \cdot \frac{-20}{x+y-2} = 40 \end{cases}$$

$$\text{III} \begin{cases} x-y+2 = \frac{-8}{x+y-2} \\ y+z-x = \frac{-20}{x+y-2} \\ (x+y-2)^2 = 4 \end{cases}$$

$$\text{III} \quad x+y-2 = \pm 2$$

тогда

$$\begin{aligned} x+y-2 &= 2 \\ \begin{cases} x-y+2 &= \frac{-8}{2} \\ y+z-x &= \frac{-20}{2} \end{cases} \\ 2z &= -14 \\ z &= -7 \end{aligned}$$

$$\text{I} \quad x^2 = (y+7)^2 - 8$$

$$y^2 = (-7-x)^2 - 20$$

$$\text{II} \quad 49 = (x-y)^2 + 40$$

$$\text{III} \quad 49 = (x-y)^2 + 40$$

$$(x-y)^2 = 9$$

$$x-y = \pm 3$$

$$x-y = 3$$

$$y = x-3$$

$$\text{I} \quad x^2 = (x-3+7)^2 - 8$$

$$x^2 = (x+4)^2 - 8$$

$$x^2 - (x+4)^2 = -8$$

$$(x-x-4)(x+x+4) = -8$$

$$2x+4 = 2$$

$$x = -1$$

$$y = -1-3 = -4$$

$$x-y = -3$$

$$y = x+3$$

$$\text{I} \quad x^2 = (x+3+7)^2 - 8$$

$$x^2 = (x+10)^2 - 8$$

$$x^2 - (x+10)^2 = -8$$

$$(x-x-10)(x+x+10) = -8$$

$$2x+10 = \frac{8}{10}$$

$$2x = \frac{8}{10} - 10$$

$$x = 4,6$$

$$y = 4,6+3 = 7,6$$

$$\begin{aligned} x+y-2 &= -2 \\ \begin{cases} x-y+2 &= \frac{-8}{-2} \\ y+z-x &= \frac{-20}{-2} \end{cases} \\ 2z &= 14 \\ z &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x^2 = (y-7)^2 - 8 \\ y^2 = (7-x)^2 - 20 \end{cases}$$

$$\text{II} \quad 49 = (x-y)^2 + 40$$

$$\text{III} \quad 49 = (x-y)^2 + 40$$

$$x-y = \pm 3$$