

ВАРИАНТ 1
АЭРОКОСМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

Ректор



Ю.А. Антохина

1. Найдите количество натуральных чисел n , не превосходящих 1000, для которых выполнено $\text{НОД}(n, 65) = 13$.
2. При каких n можно разбить n -угольник непересекающимися диагоналями на 5-угольники и 9-угольники так, чтобы количество 5-угольников было в 3 раза больше количества 9-угольников?
3. В фирме работает 150 человек с одинаковой производительностью труда. Требуется создать коллектив для работы над срочным проектом. Известно, что если в коллективе работает k человек, то каждый из них каждый час прерывает работу на $2(k-1)$ минут, чтобы обсудить с коллегами план действий. При каком количестве человек в коллективе проект будет выполнен в кратчайшие сроки? Найдите все возможные ответы.
4. В языковом клубе есть группы английского, французского и испанского. Каждый член клуба входит в одну или две группы.
Половина изучающих английским занимаются дополнительно французским. Четверть изучающих английским занимается испанским.
Треть изучающих французский занимается английским. Шестая изучающих французский занимается испанским.
Десятая часть изучающих испанский занимается английским. Какая доля изучающих испанский занимается французским?

5. Решите уравнение $|\log_3(243x^4)| - \log_3 |81x^3| = 12$.

6. Решите уравнение

$$\cos^6 x + \sin^6 x = 4 \sin^2 2x$$

7. При каких значениях параметра a многочлены

$$f(x) = x^3 + x^2 - ax - (2a^2 + 64), \quad g(x) = x^3 + 2x^2 - 2ax - (4a^2 + 64)$$

имеют общий корень?

8. Числа a и b – не целые. Известно, что $ab = [a][b] = -5$. Докажите, что $\{a\} \leq 6\{b\}$.
(Квадратные скобки обозначают целую часть числа, фигурные скобки обозначают дробную часть числа.)
9. Функция $f(x)$ определена на интервале $(-1; 1)$. Известно, что функция $g(x)$, заданная равенством

$$g(x) = 2f(\sin x) + 3f(\cos x)$$

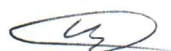
ограничена.

Докажите, что функция $f(x)$ тоже ограничена.

10. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 = (y-z)^2 - 8, \\ y^2 = (z-x)^2 - 16, \\ z^2 = (x-y)^2 + 32. \end{cases}$$

Ответственный секретарь оргкомитета



А.К. Малышев

2025 г.

**ГУАП**Государственный университет
аэрокосмического приборостроенияШифр 1009**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ**Олимпиада школьников по МатематикеВариант № 1

№ задания	1		2		3		4		5		
ответ	67		15; 16		0, 1 15; 16		0, 1		$-3^{77}; -3^{-77}; 3^{-77}; 3^{77}$		
№ задания	6		7		8		9		10		
ответ											
№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Итого
балл	5	—	5	5	5	—	—	—	—	—	20

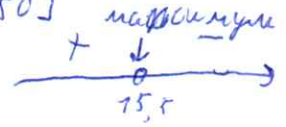
① Рассмотрим все делители числа 65: 1, 5, 13, 65. Таким образом $\text{НОД}(n, 65) = 13$, если n делится на 13 и не делится на 65. Множество чисел, делящихся на 65, полностью входит в множество чисел, делящихся на 13. Чисел ~~не~~ не превосходящих 1000 и делящихся на 13, 76. Чисел, не превосходящих 1000 и делящихся на 65, 15. $76 - 15 = 61$ число n

Ответ: 67

③ Производительность коллектива будем определять как ~~количество~~ время работы за час количество минут работы за час. В кратчайшие сроки будем выполнять проект коллективом с максимальной производительностью

Производительность коллектива можно описать следующей функцией:
 $f(k) = 60 \cdot k - k \cdot 2(k-1) = -2k^2 + 62k$, где k - количество рабочих

Найдем максимум этой функции на отрезке $[1; 150]$
 $(-2k^2 + 62k) = -4k + 62$; $-4k + 62 = 0$; $k = 15,5$



$k = 15,5$
 Рассмотрим два наименьшие целые количества рабочих

$$f(15) = -2 \cdot 15^2 + 62 \cdot 15 = 32 \cdot 15 = 2 \cdot 16 \cdot 15$$

$$f(16) = -2 \cdot 16^2 + 62 \cdot 15 = 30 \cdot 16 = 2 \cdot 16 \cdot 15$$

$$f(15) = f(16), \text{ так как } 2 \cdot 16 \cdot 15 = 2 \cdot 16 \cdot 15 \text{ верно}$$

Ответ: 15; 16

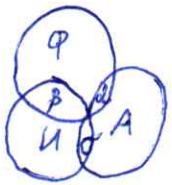
Пусть количество людей, изгнанных армянский, равно x , количество людей, изгнанных французский, равно y , а количество людей, изгнанных чикагский, равно z .

Заметим, что $\frac{1}{4}x = \frac{1}{10}z$; $z = 2,5x$

$$\frac{1}{2}x = \frac{2}{3}y; y = 1,5x;$$

$$\frac{1}{6}y = \frac{25}{6}x = 0,25x; 0,25x = \frac{925}{2,5}z$$

$$= 0,1z$$



$$\alpha = \frac{1}{2}x = \frac{1}{3}y$$

$$\beta = \frac{1}{6}y$$

$$\gamma = \frac{1}{4}x = \frac{1}{10}z$$

Ответ: 0,1

$$5) |\log_3(243x^4)| - \log_3|81x^3| = 12$$

$$|\log_3(3^5x^4)| - \log_3|x^3| - 16 = 0$$

Раскроем модуль

$$\begin{cases} \log_3(3^5x^4) - \log_3(x^3) - 16 = 0, \text{ при } \begin{cases} \log_3(3^5x^4) \geq 0 \\ x^3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq \frac{1}{3\sqrt[4]{3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(\log_3(3^5x^4) - \log_3(x^3) - 16) = 0, \text{ при } \begin{cases} \log_3(3^5x^4) \geq 0 \\ x^3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x < \frac{1}{3\sqrt[4]{3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3(3^5x^4) - \log_3(-x^3) - 16 = 0, \text{ при } \begin{cases} \log_3(3^5x^4) \geq 0 \\ x^3 < 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{3\sqrt[4]{3}} \leq x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\log_3(3^5x^4) - \log_3(-x^3) - 16 = 0, \text{ при } \begin{cases} \log_3(3^5x^4) < 0 \\ x^3 < 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{3\sqrt[4]{3}} < x < 0 \end{cases}$$

$$\text{ODЗ: } \begin{cases} 243x^4 > 0 \\ |81x^3| > 0 \end{cases}$$

$$x \neq 0$$

Решим каждое уравнение по отдельности

$$1) \log_3(3^5 x^4) - \log_3(x^3) - 16 = 0$$

$$\log_3\left(\frac{3^5 x^4}{x^3 \cdot 3^{16}}\right) = 0$$

$$\frac{x}{3^{11}} = 1$$

$$\boxed{x = 3^{11}}$$

$$2) -\log_3(3^5 x^4) - \log_3(x^3) - 16 = 0$$

$$\log_3(3^5 \cdot x^4 \cdot x^3 \cdot 3^{16}) = 0$$

$$x^7 \cdot 3^{21} = 1$$

$$\boxed{x = \frac{1}{27}}$$

$$3) \log_3(3^5 x^4) - \log_3(-x^3) - 16 = 0$$

$$\log_3\left(\frac{3^5 x^4}{-x^3 \cdot 3^{16}}\right) = 0$$

$$-\frac{x}{3^{11}} = 1$$

$$\boxed{x = -3^{11}}$$

$$4) -\log_3(3^5 x^4) - \log_3(-x^3) - 16 = 0$$

$$\log_3(3^5 \cdot x^4 \cdot (-x^3) \cdot 3^{16}) = 0$$

$$-x^7 \cdot 3^{21} = 1$$

$$\boxed{x = -\frac{1}{27}}$$

Ответ: -3^{11} ; ~~3^{11}~~ -3^{-3} ; 3^{-7} ; 3^{11}